

Filtraggio spazio-temporale discreto

9.1 Introduzione

Elaborazione dei segnali proveniente da schiere di sensori, omogenei e spazialmente distribuiti, è in gergo indicata come *Array Signal Processing* o semplicemente *Array Processing (AP)*.

La finalità dell'AP è l'estrazione d'informazione significativa dai dati acquisiti.

AP - campionamento temporale e spaziale

- DSP lineare: discriminazione solo nel dominio della *frequenza-temporale*.
- AP campionamento temporale e spaziale : discriminazione dei segnali anche attraverso il dominio dell'angolo di arrivo detto anche della *frequenza-spaziale*.

9.1.1 Applicazioni dell'*array processing*

- miglioramento *Signal-to-Noise Ratio* (SNR) del segnale ricevuto da una o più specifiche direzioni o *Look-Directions* (LD), rispetto al segnale acquisito con un singolo sensore ;
- determinazione del numero, della localizzazione, della forma d'onda delle sorgenti che propagano energia;
- separazione di sorgenti indipendenti;
- inseguimento del movimento di sorgenti che emettono energia.

Il miglioramento dell'SNR può essere effettuato considerando la risposta spaziale o *diagramma di direttività* (o *diagramma di radiazione*) della schiera di sensori.

- *Beamforming* (BF): orientazione del diagramma di radiazione .

- **Direction Of Arrivals (DOA):** metodologie di calcolo che consentono la stima della direzione di arrivo dell'onda
- **Source separation:** separazioni di sorgenti, sono definiti nel caso di più sorgenti indipendenti operanti anche alle stesse frequenze ma in posizioni spaziali differenti
- **Source Tracking:** inseguimento della sorgente.

9.1.2 Tipologie di sensore

- Sensori isotropici
- Sensori con specifico diagramma di radiazione

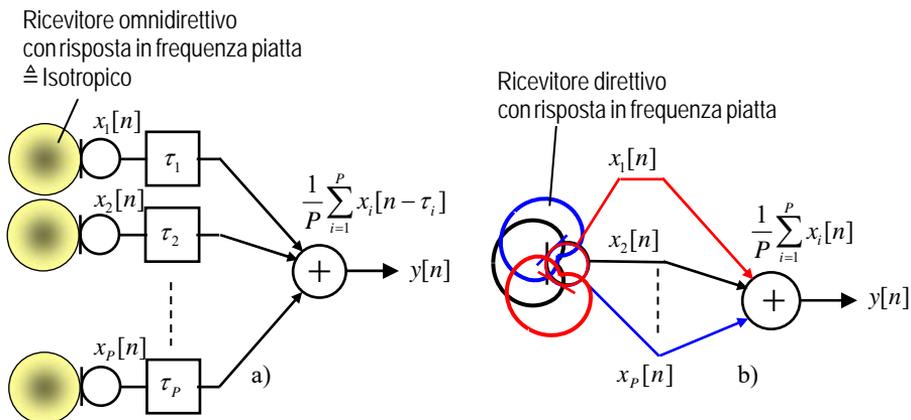


Figura 9.1 Esempi di schiere di sensori non coincidenti e coincidenti.

Disposizione sensori

- **schiera coincidente:** sensori necessariamente non isotropici posizionati sullo stesso punto
- **schiera distribuita:** sensori (anche) isotropici posizionate secondo specifiche strategie.

9.1.3 Distribuzione spaziale dei sensori

- 1D: lineare a distribuzione uniforme, a innesto armonico;
- 2D: T , P -greco, X , circolare, random;
- 3D: sferico coincidente, cilindrico, precise geometrie, random ecc.

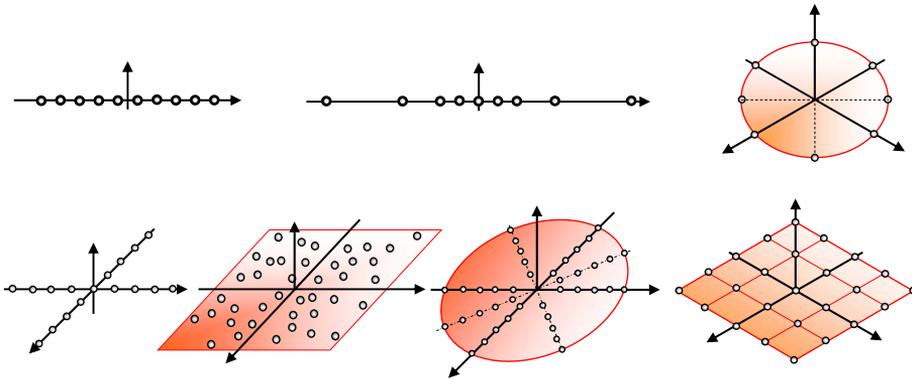


Figura 9.2 Distribuzione spaziale dei ricevitori: geometrie tipiche per array 1D e 2D.

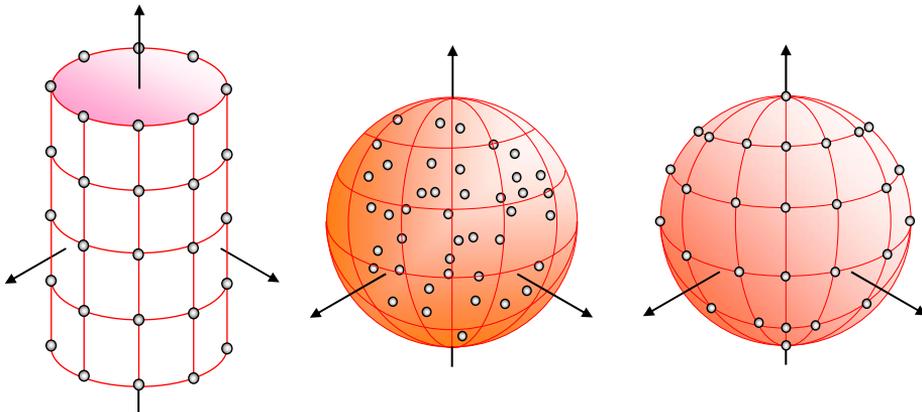


Figura 9.3 Geometrie tipiche di array 3D.

9.2 Array processing: modello e notazione

Coordinate sferiche

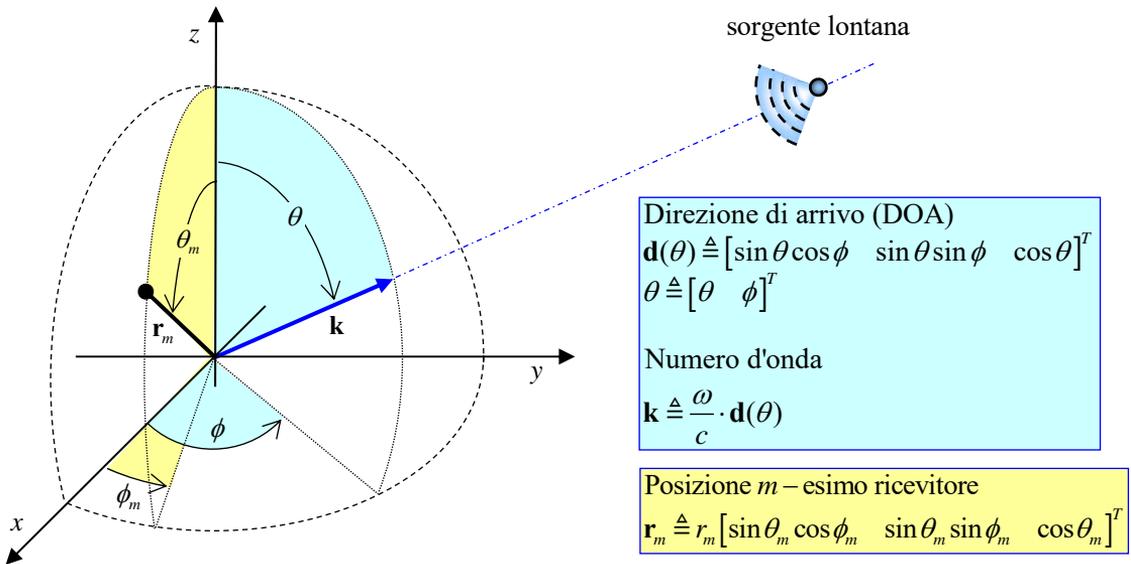


Figura 9.4 Descrizione dello spazio tridimensionale in coordinate sferiche (*azimuth*, *elevazione* e *range*) della k -esima sorgente e dell' m -esimo ricevitore.

9.2.1 Modello di propagazione

Equazione d'onda

$$\nabla^2 s(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} \quad (9.1)$$

- $s(t, \mathbf{r})$ rappresenta la **grandezza d'onda**
- c indica la sua **velocità di propagazione**.
- \mathbf{r} rappresenta il **vettore della posizione**
 - sistema di riferimento cartesiano: $\mathbf{r} = [x \quad y \quad z]^T$,
 - sistema sferico: $\mathbf{r} = r [\sin \theta \cos \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta]^T$
- ∇^2 **operatore Laplaciano** (derivata II spaziale)
 - sistema di riferimento cartesiano:

$$\nabla^2 \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- sistema di riferimento sferico:

$$\nabla^2 \triangleq \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Caso acustico

$s(t, \mathbf{r})$ rappresenta l'onda di pressione nel fluido $s(t, \mathbf{r}) \equiv p(t, \mathbf{r})$, con velocità di propagazione definita dalla relazione $c = dP/d\rho$ (P è la pressione e ρ la densità del fluido). In aria la velocità di propagazione in condizioni standard è pari a $c \approx 334 \text{ ms}^{-1}$.

Caso Elettro Magnetico (EM)

$s(t, \mathbf{r}) \equiv E(t, \mathbf{r})$, nel caso EM la grandezza può essere il campo elettrico (o quello magnetico), con velocità di propagazione nel vuoto pari a $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$.

Equazione d'onda

Coordinate cartesiane

$$\frac{\partial^2 s(t, \mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s(t, \mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s(t, \mathbf{r})}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} \quad (9.2)$$

Coordinate sferiche

$$\frac{\partial^2 s(t, \mathbf{r})}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s(t, \mathbf{r})}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 s(t, \mathbf{r})}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial s(t, \mathbf{r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial s(t, \mathbf{r})}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(t, \mathbf{r})}{\partial t^2}$$

Soluzione equazione d'onda

Onda piana monocromatica

$$s(t, \mathbf{r}) = S_0 e^{j(\omega t - \mathbf{r}^T \mathbf{k})} \quad (9.3)$$

Campo vicino: ipotesi onda piana non verificata.

$$s(t, \mathbf{r}) = \frac{S_0}{4\pi r} e^{j(\omega t - \mathbf{r}^T \mathbf{k})} \quad \text{caso singola sorgente e un solo sensore} \quad (9.4)$$

Un'onda sferica può essere approssimata come piana sul ricevitore solo se la sua distanza è molto maggiore del quadrato della massima dimensione fisica della sorgente, diviso la lunghezza d'onda.

Grandezza d'onda

- $S_0 \rightarrow S(t)$. : ampiezza (tempo variante) dell'onda

- ω rappresenta la *pulsazione* del segnale ($\omega = 2\pi f$; $f = 1/T$ rappresenta la *frequenza temporale* e T il periodo).
- \mathbf{k} : vettore **numero d'onda** indica la *velocità* e la *direzione di propagazione* dell'onda, ed è definito come

$$\mathbf{k} = k \cdot [\sin \theta \cos \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta]^T \quad \text{con } k = |\mathbf{k}| \quad (9.5)$$

$$= k \cdot \mathbf{d}(\theta).$$

- θ : coppia $(\theta, \phi) \rightarrow \theta$, generica direzione di arrivo in coordinate sferiche
- $\mathbf{d}(\theta)$: vettore unitario, **direzione di propagazione** o **Direction Of Arrival (DOA)**.
- k numero d'onda scalare è l'ampiezza del vettore numero d'onda \mathbf{k} ; è legato alla *velocità di propagazione*, come,

$$k = 2\pi/\lambda = \omega/c \quad (9.6)$$

dove $\lambda = c/f$ è la *lunghezza d'onda*.

- \mathbf{r}_m posizione spaziale del ricevitore, per ipotesi puntiforme, è indicata con il vettore \mathbf{r}_m definito, in modo analogo alla (9.5), in coordinate sferiche o cartesiane, come

$$\mathbf{r}_m = r_m [\sin \theta_m \cos \phi_m \quad \sin \theta_m \sin \phi_m \quad \cos \theta_m]^T \quad (9.7)$$

$$= [x_m \quad y_m \quad z_m]^T$$

segnale in prossimità dell' m -esimo sensore, per le (9.3) e (9.5)-(9.7), risulta

$$s_m(t, \mathbf{r}) = S_0 e^{j(\omega t - \mathbf{r}_m^T \mathbf{k})} \quad (9.8)$$

$$= S_0 e^{j\omega t} e^{-j(\omega/c) \mathbf{r}_m^T \mathbf{d}(\theta)}.$$

9.2.1.1 Ipotesi di onda piana

I ricevitori sono irradiati con lo stesso segnale ritardato.

Ritardo di propagazione tra i sensori

(sensore di riferimento $\mathbf{r}_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$),

$$\tau_m = \mathbf{r}_m^T \mathbf{d}(\theta) / c. \quad (9.9)$$

Soluzione equazione d'onda nel caso onda-piana

In assenza di modulazione, ponendo per semplicità $S_0 = 1$, il segnale trasmesso è solo quello portante indicato come $s(t) = e^{j\omega t}$. In questo caso la soluzione risulta essere

$$\begin{aligned} s_m(t, \mathbf{r}) &= s(t)e^{-j\mathbf{r}_m^T \mathbf{k}} \\ &= s(t)e^{-j\omega \tau_m} \end{aligned} \quad \text{per } m = 1, 2, \dots, P \quad (9.10)$$

Modello fasoriale di propagazione

Omettendo la scrittura della dipendenza temporale $e^{j\omega t}$ che è di tipo sinusoidale, la propagazione può essere rappresentata con il numero complesso definito come

$$\bar{S} = e^{-j\mathbf{r}_m^T \mathbf{k}}$$

tale che $s_m(t, \mathbf{r}) = \bar{S}e^{j\omega t}$.

Derivate modello fasoriale

Campo lontano (utile in EM antenne,)

$$\frac{\partial^n}{\partial \mathbf{r}^n} s(t, \mathbf{r}) = S_0 (-j\mathbf{k})^n e^{-j\mathbf{r}^T \mathbf{k}} \quad (9.11)$$

Campo vicino (utile in onde acustiche, microfoni ecc)

$$\frac{\partial^n}{\partial \mathbf{r}^n} s(t, \mathbf{r}) = S_0 \frac{n!}{r^{n+1}} e^{-j\mathbf{r}^T \mathbf{k}} (-1)^n \sum_{m=0}^n \frac{(j\mathbf{r}\mathbf{k})^m}{m!}. \quad (9.12)$$

9.2.1.2 Steering e Steering Vector

Steering (direzione) fasore che compare nella soluzione dell'equazione d'onda

$$a_m(\omega, \theta) = e^{-j\mathbf{r}_m^T \mathbf{k}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

informazioni geometriche onda che irradia l' m -esimo sensore.

Steering vector (vettore di direzione)

$$\bar{\mathbf{a}}(\omega, \theta) = [e^{-j\mathbf{r}_1^T \mathbf{k}} \quad e^{-j\mathbf{r}_2^T \mathbf{k}} \quad \dots \quad e^{-j\mathbf{r}_P^T \mathbf{k}}]^T. \quad (9.13)$$

Il vettore $\bar{\mathbf{a}}(\omega, \theta)$ incorpora tutta la caratteristica spaziale e di propagazione dell'onda che illumina l'array.

$\bar{\mathbf{a}}(\omega, \theta)$ rappresenta una varietà differenziale o manifold, ovvero in termini di geometria differenziale, uno spazio matematico che su una scala sufficientemente piccola si comporta come uno spazio Euclideo.

La nozione di varietà differenziabile è una generalizzazione del concetto di curva e di superficie differenziabile in dimensioni arbitrarie. Si tratta di una realizzazione del concetto di varietà che fa uso degli strumenti del calcolo infinitesimale.

Così come una curva differenziabile è un oggetto che localmente assomiglia ad una retta, o una superficie che localmente assomiglia ad un piano, una varietà n -dimensionale somiglierà localmente ad uno spazio euclideo n -dimensionale. L'aggettivo "differenziabile" indica il fatto che questa "somiglianza" locale è definita mediante parametrizzazioni dotate di una struttura differenziabile che verrà descritta in seguito e che garantisce la possibilità di associare univocamente in ogni punto uno "spazio tangente" della stessa dimensione della varietà (come ad esempio una retta tangente a una curva o un piano tangente a una superficie).

Le varietà differenziabili sono gli elementi di base della geometria differenziale, punto d'incontro di analisi e topologia. Essenzialmente la teoria delle varietà differenziabili serve a trasferire su oggetti tipicamente descritti come spazi topologici i concetti e gli strumenti del calcolo differenziale, definito generalmente sugli spazi euclidei. Lo studio delle varietà differenziabili è fondamentale in fisica, in quanto permette di definire campi vettoriali e flussi di fase su spazi non necessariamente piatti, ma trova innumerevoli applicazioni anche nella matematica pura, grazie alle interconnessioni con altre branche quali la topologia e la teoria dei numeri.

[WIKIPEDIA]

Campo visivo o field-of-view (FOV)

Formalmente il manifold è introdotto come un insieme continuo di *steering vectors* definito come

$$\mathcal{M} \triangleq \{\bar{\mathbf{a}}(\omega, \theta); \theta \in \Theta, \omega \in \Omega\} \quad (9.14)$$

dove per una certa ω , Θ rappresenta il **campo visivo** o **field-of-view** (FOV) della schiera.

Per esempio per alcuni array 1D il campo visivo è pari a $\Theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$.

Si osservi che nel caso di onda piana, per la (9.10), lo steering vector risulta

$$\bar{\mathbf{a}}(\omega, \theta) = [1 \quad e^{-j\omega\tau_2} \quad \dots \quad e^{-j\omega\tau_p}]^T \quad (9.15)$$

dove, per definizione $\tau_1 = 0$, ovvero il primo sensore è quello di riferimento.

9.2.1.3 Funzione di direttività del sensore

Un ricevitore è detto **isotropico** se ha una risposta in frequenza piatta nella banda di interesse e identica per tutte le direzioni. Nel caso di ricevitori non isotropici occorre definire una funzione di risposta, in direttività e in frequenza $b_m(\omega, \theta)$, detta anche **diagramma di radiazione** del sensore, definita come

$$b_m(\omega, \theta) = B_m(\omega, \theta)e^{-j\gamma_m(\omega, \theta)} \quad m = 1, 2, \dots, P \quad (9.16)$$

Indicando con $\mathbf{b}(\omega, \theta) \in \mathbb{C}^{P \times 1}$ il vettore con i diagrammi di radiazione dei ricevitori

Lo **steering vector**, indicato come $\mathbf{a}(\omega, \theta) \in \mathbb{C}^{P \times 1}$, è ridefinito come

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\omega, \theta) &= \bar{\mathbf{a}}(\omega, \theta) \otimes \mathbf{b}(\omega, \theta) \\ &= [b_1(\omega, \theta)e^{-j\mathbf{r}_1^T \mathbf{k}} \quad b_2(\omega, \theta)e^{-j\mathbf{r}_2^T \mathbf{k}} \quad \dots \quad b_p(\omega, \theta)e^{-j\mathbf{r}_p^T \mathbf{k}}]^T \end{aligned} \quad (9.17)$$

dove il simbolo \otimes indica il prodotto di Hadamard (moltiplicazione punto-punto dei vettori).
 Si osservi che nel caso di ricevitori isotropici vale $\mathbf{a}(\omega, \theta) \equiv \bar{\mathbf{a}}(\omega, \theta)$.

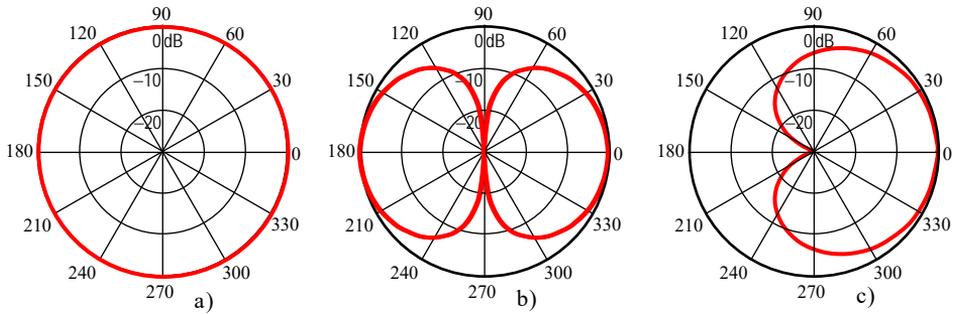


Figura 9.5 Esempi di diagrammi di radiazione spaziale di sensori, valutati per una frequenza specifica $b_m(\omega_0, \theta)$: a) omnidirezionale o isotropico; b) diagramma a 'otto'; c) a cardioide.

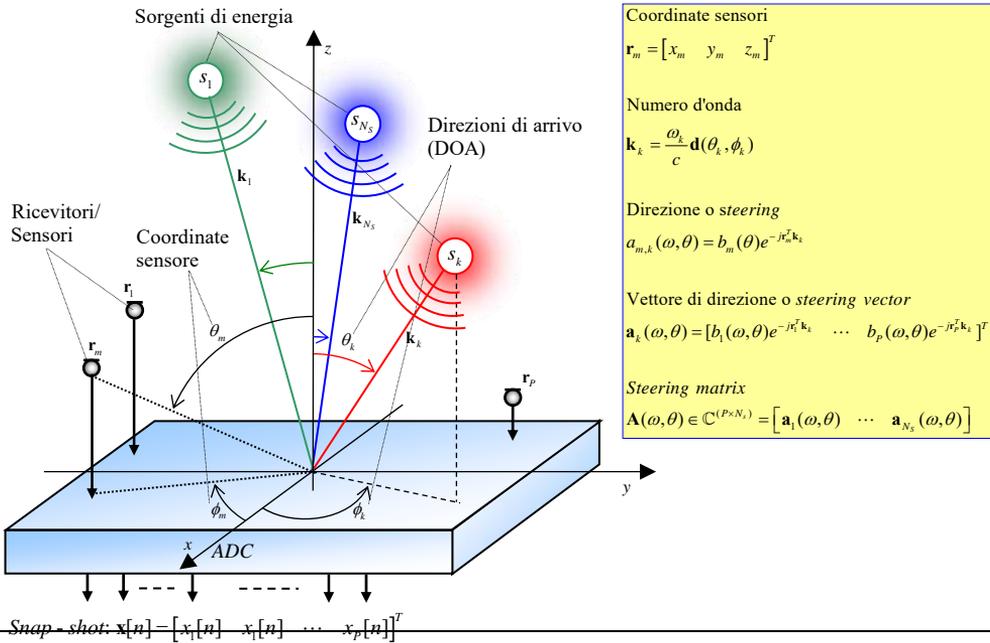


Figura 9.6 Schema di array a distribuzione tridimensionale di sensori. P rappresenta il numero di sensori, θ_k e ϕ_k gli angoli di arrivo dell'onda.

9.2.2 Modello MIMO del segnale sui sensori nel caso di onda piana: N_s sorgenti e P sensori

Modello sorgente-ricevitore

k - esima

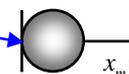
Sorgente Energia



$$FdT(\text{sorgente}_k, \text{sensore}_m)$$

m - esimo

Sensore



$$x_m(t) = a_{m,k}(t) * s_k(t) + n_m(t)$$

$a_{m,k}(t) \triangleq$ risposta impulsiva percorso

$n_m(t) \triangleq$ rumore di misura

Detta \mathbf{A} la matrice delle risposte impulsive sorgente-sensore

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{P \times N_s(N_a)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1,1}^T & \mathbf{a}_{1,2}^T & \cdots & \mathbf{a}_{1,N_s}^T \\ \mathbf{a}_{2,1}^T & \mathbf{a}_{2,2}^T & \cdots & \mathbf{a}_{2,N_s}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{P,1} & \mathbf{a}_{P,2} & \cdots & \mathbf{a}_{P,N_s} \end{bmatrix}_{P \times N_s}$$

Modello tempo continuo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} * \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$$

Propagazione anecoica

$a_{m,k}(t) = \delta(t - \tau_{m,k})$ (ritardo puro), $a_m(\omega, \theta) = e^{-j\omega \tau_{m,k}}$ $x \in \mathbb{R}$. Per cui possiamo scrivere

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\omega, \theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$$

La matrice \mathbf{A} è costruita con gli *steering vectors*, $\mathbf{a}(\omega, \theta) \in \mathbb{C}^{P \times 1}$

Considerando la presenza di N_s sorgenti e P ricevitori, ogni sensore riceve lo stesso segnale ritardato.

$$\tau_{m,k} = \mathbf{r}_m^T \mathbf{d}(\theta_k) / c \quad (9.18)$$

Nel caso di sensore non isotropico possiamo scrivere

$$A_{m,k}(\omega) \triangleq b_m(\omega, \theta) e^{-j\omega \tau_{m,k}} \quad m = 1, 2, \dots, P; \quad k = 1, 2, \dots, N_s. \quad (9.19)$$

9.2.2.1 Modello di propagazione MIMO a tempo discreto in ambiente confinato

Detta N_a la lunghezza della risposta impulsiva, definiamo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{P \times N_s(N_a)}$ la matrice con le risposte impulsive $a_{m,k}[n]$ tra le sorgenti e i sensori,

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{P \times N_s(N_a)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1,1}^T & \mathbf{a}_{1,2}^T & \cdots & \mathbf{a}_{1,N_s}^T \\ \mathbf{a}_{2,1}^T & \mathbf{a}_{2,2}^T & \cdots & \mathbf{a}_{2,N_s}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{P,1} & \mathbf{a}_{P,2} & \cdots & \mathbf{a}_{P,N_s} \end{bmatrix}_{P \times N_s} \quad (9.20)$$

Definendo il vettore del segnale composito $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{(N_a)N_s \times 1} = [\mathbf{s}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{s}_{N_s}^T]^T$

per lo snap-shot di uscita, possiamo scrivere

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{A} \mathbf{s} + \mathbf{n}[n]. \quad (9.21)$$

modello del segnale MIMO, P sensori e N_s sorgenti.

9.2.3 Vettori di direzione per geometrie di array tipiche

9.2.3.1 Array lineare a distribuzione uniforme (ULA)

- *Uniform Linear Array* (ULA)
- Coordinate sensori: $\mathbf{r}_m = [0 \quad 0 \quad (m-1)d]^T$ per $m = 1, 2, \dots, P$,

Steering è definito come

$$\begin{aligned} a_m(\omega, \theta) &= e^{-jk[0 \quad 0 \quad (m-1)d][\sin \theta \cos \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta]^T} \\ &= e^{-j(\omega/c)(m-1)d \cos \theta} \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots, P. \quad (9.22)$$

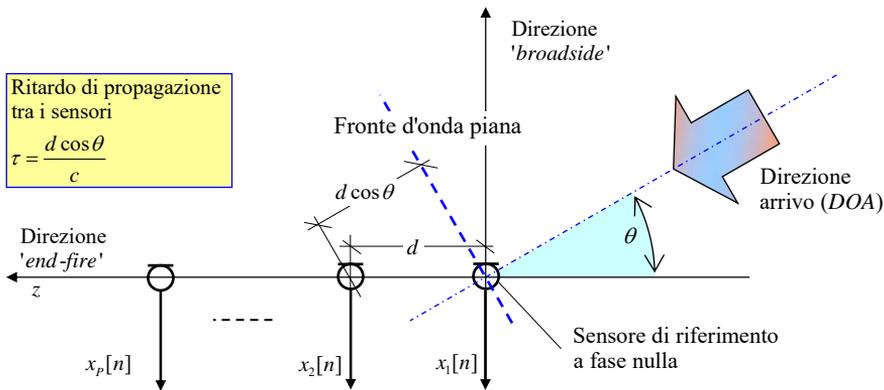


Figura 9.7 *Uniform Linear Array* (ULA).

Ritardo di propagazione relativo tra i sensori la quantità

$$\tau = \frac{d \cos \theta}{c}. \quad (9.23)$$

τ rappresenta il ritardo di propagazione relativo tra due sensori adiacenti per un'onda piana incidente proveniente dalla direzione θ .

Lo **steering vector** per l'ULA è definito come

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ULA}(\omega, \theta) &= [1 \quad e^{-jkd \cos \theta} \quad \dots \quad e^{-j(P-1)kd \cos \theta}]^T \\ &= [1 \quad e^{-j\omega\tau} \quad \dots \quad e^{-j\omega(P-1)\tau}]^T. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Ne segue che per l'ULA la forma generale si riduce a

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}^T s[n] + \mathbf{n}[n] \quad (9.25)$$

che coincide proprio con la **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**

9.2.3.2 Direzioni broadside ed end-fire

- $\theta = 90^\circ$ **broadside direction.**

Steering vector, per $\theta = 90^\circ$ vale $e^{-jkd \cos \theta} = 1$

$$\mathbf{a}_{ULA}(\omega, \theta) = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T = \mathbf{1}^T. \quad (9.26)$$

- $\theta = 0^\circ$ **end-fire direction.**

Steering vector, per $d \ll \lambda$, $e^{-j2\pi(d/\lambda)} \approx 1$, e il vettore non dipende più dalla direzione $\mathbf{a}_{ULA}(\omega, \theta) \sim [1 \ \dots \ 1]^T, \forall \theta$.

9.2.3.3 Array circolare a distribuzione uniforme (UCA)

Uniform Circular Array (UCA).

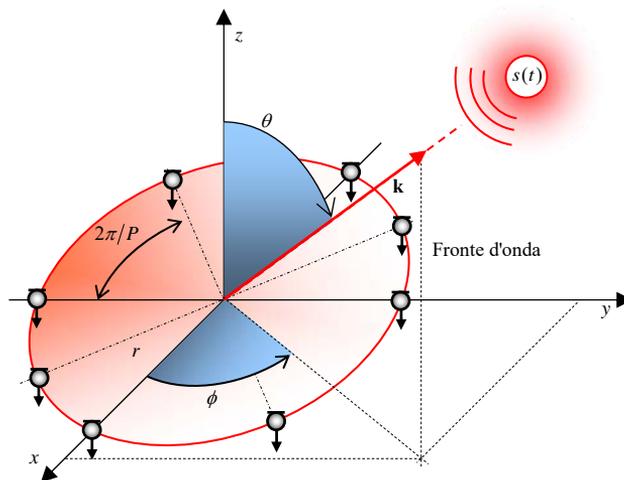


Figura 9.8 Array circolare a distribuzione uniforme di sensori o *Uniform Circular Array (UCA)*.

$$\mathbf{r}_m = r \left[\cos \frac{2\pi}{P} (m-1) \quad \sin \frac{2\pi}{P} (m-1) \quad 0 \right]^T, \quad m = 1, 2, \dots, P. \quad (9.27)$$

$$\begin{aligned} a_m(\omega, \theta) &= e^{-jkr \left[\cos \frac{2\pi}{P} (m-1) \quad \sin \frac{2\pi}{P} (m-1) \quad 0 \right] \left[\sin \theta \cos \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta \right]^T} \\ &= e^{-j\omega \tau_m} \end{aligned}, \quad m = 1, 2, \dots, P \quad (9.28)$$

$$\tau_m = \frac{\sin \theta}{c} [\cos \phi \cos \frac{2\pi}{P} (m-1) + \sin \phi \sin \frac{2\pi}{P} (m-1)], \quad m = 1, 2, \dots, P \quad (9.29)$$

$$\mathbf{a} = [\delta[n - \tau_1] \quad \delta[n - \tau_2] \quad \dots \quad \delta[n - \tau_P]]. \quad (9.30)$$

Si osservi che, proprio per la geometria circolare dell'array, a differenza del caso ULA, i ritardi di propagazione sono differenti.

L'estensione della definizione di steering vector ad array con geometria qualsiasi, espresso in termini di ritardo, risulta semplice.

9.2.3.4 Array lineare a distribuzione armonica

- **Acquisizione in sottobande spaziali**
- **Successiva elaborazione in sottobande in frequenza**

Molto usata negli array microfonic per problemi di speech enhancement

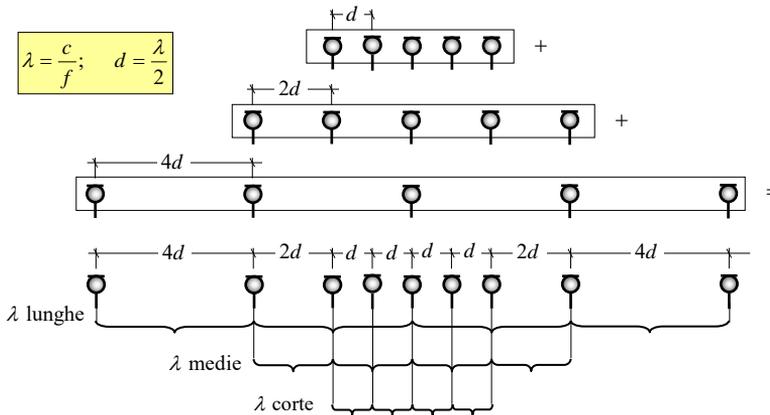


Figura 9.9 Schiera lineare di nove sensori con distribuzione armonica.

9.2.4 Modello circuitale per array processing e campionamento spazio temporale

9.2.4.1 Modello composto per array processing

Modello a banda stretta,

il beamforming consiste in una semplice combinazione lineare.

$$y[n] = \sum_{k=1}^P w_k^* x_k[n]. \quad (9.31)$$

Nel caso di array lineare con ULA, il beamformer può essere interpretato come un **filtro FIR operante nel dominio spaziale discreto in grado di discriminare segnali sinusoidali provenienti da direzioni θ diverse.**

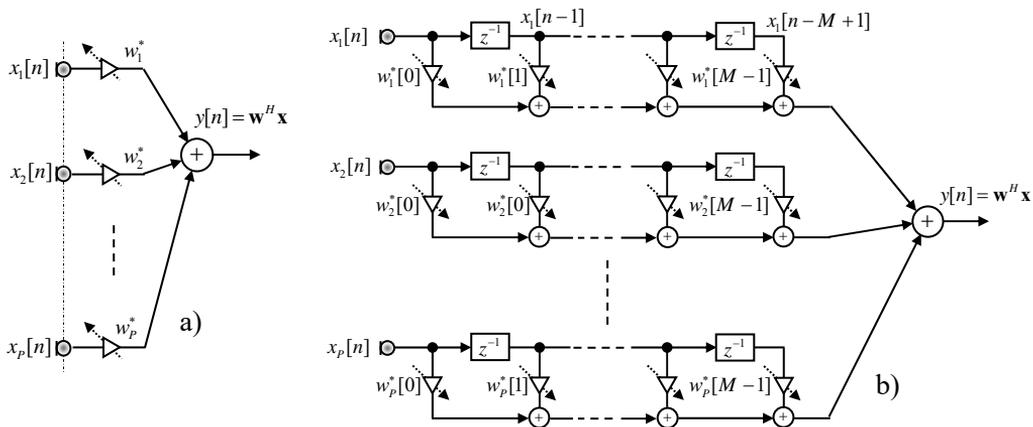


Figura 9.10 Beamforming per sorgenti a banda stretta e larga: a) *phased array* o *Weighted-Sum Beamforming (WSBF)* consiste in combinazione lineare complessa dei segnali presenti sui ricevitori; b) beamforming a banda larga o *Filter&Sum BF (FSBF)* il segnale di ogni sensore è filtrato con un filtro FIR di lunghezza M . Le uscite dei filtri sono sommate: sistema MISO

Modello a banda larga,
il beamforming consiste in un sistema MISO

$$y[n] = \sum_{k=1}^P \sum_{j=0}^{M-1} w_k^*[j] x_k[n-j] \quad (9.32)$$

con

$$\mathbf{w} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P(M) \times 1} = [\mathbf{w}_1^T \quad \mathbf{w}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{w}_P^T]^T \quad (9.33)$$

$$\mathbf{x} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P(M) \times 1} = [\mathbf{x}_1^T \quad \mathbf{x}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{x}_P^T]^T \quad (9.34)$$

con $\mathbf{w}_k = [w_k^*[0] \quad \cdots \quad w_k^*[M-1]]^T$ e $\mathbf{x}_k = [x_k[n] \quad \cdots \quad x_k[n-M+1]]^T$, $k = 1, 2, \dots, P$;

In forma vettoriale

$$y[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{w} \quad (9.35)$$

Modello generale,

$K = PM$ per array a larga banda;

$K = P$ per array a banda stretta;

$$y[n] = \sum_{j=0}^{K-1} w^*[j]x[j] \quad \text{con } K = \begin{cases} PM & \text{banda larga} \\ P & \text{banda stretta.} \end{cases} \quad (9.36)$$

Modello generale dominio della frequenza

$$\mathbf{W}^H = \text{DTFT}(\mathbf{w}^H)$$

$$\mathbf{X} = \text{DTFT}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{Y}(e^{j\omega}) = \mathbf{W}^H \mathbf{X} \quad (9.37)$$

Il prodotto tra i vettori è quello di Hadamard $\mathbf{Y}(e^{j\omega}) = \mathbf{W}^H \otimes \mathbf{X}$, ossia la moltiplicazione punto-punto dei vettori \mathbf{W}^H e \mathbf{X} .

9.2.4.2 Apertura spazio temporale dell'array: campionamento spazio-temporale

Apertura spaziale dell'array, indicata con r_{\max} , come illustrato in Figura 9.11 per un ULA, **la dimensione massima dell'array misurata in lunghezze d'onda.**

Il termine r_{\max} determina quante lunghezze d'onda del fronte sono contemporaneamente acquisite dall'array.

Per evitare il fenomeno dell'*aliasing spaziale*, detta λ_{\min} la lunghezza d'onda minima della sorgente da acquisire, l'intervallo di campionamento spaziale dovrà essere $d < \lambda_{\min}/2$.

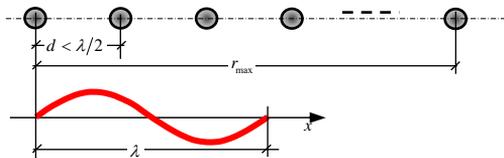


Figura 9.11 Esempio di campionamento spaziale con un ULA, di un fronte d'onda incidente parallelo all'asse dell'array con $d < \lambda/2$.

Per un angolo di arrivo della sorgente la schiera oltre a vedere una porzione spaziale dell'onda, 'vede' anche una certa finestra temporale $T(\theta)$, che dipende dall'angolo di arrivo, definita **apertura temporale dell'array**.

La componente temporale è immagazzinata nelle memorie delle linee di ritardo dei filtri.

Si osservi che, sia l'apertura spaziale (insieme alla geometria dell'array, e alla distanza relativa tra due sensori vicini), sia la frequenza di campionamento temporale, dovranno essere tali da garantire una acquisizione priva di aliasing spaziale e temporale.

Nel caso di onda incidente puramente sinusoidale o a *banda stretta* la discriminazione temporale (o in frequenza) risulta, ovviamente, inconsistente e l'array effettua un semplice filtraggio nel solo dominio spaziale θ .

Condizione array a banda stretta

- 1) Larghezza di banda della sorgente $B = f_{\max} - f_{\min}$;
- 2) Tempo di apertura dell'array $T(\theta)$.

Banda stretta se

$$T(\theta) \ll 1/B$$

ovvero se

Band-Width Product

$$TBWP \triangleq T(\theta) \cdot B \ll 1$$

allora l'onda osservata ha forma pressoché sinusoidale.

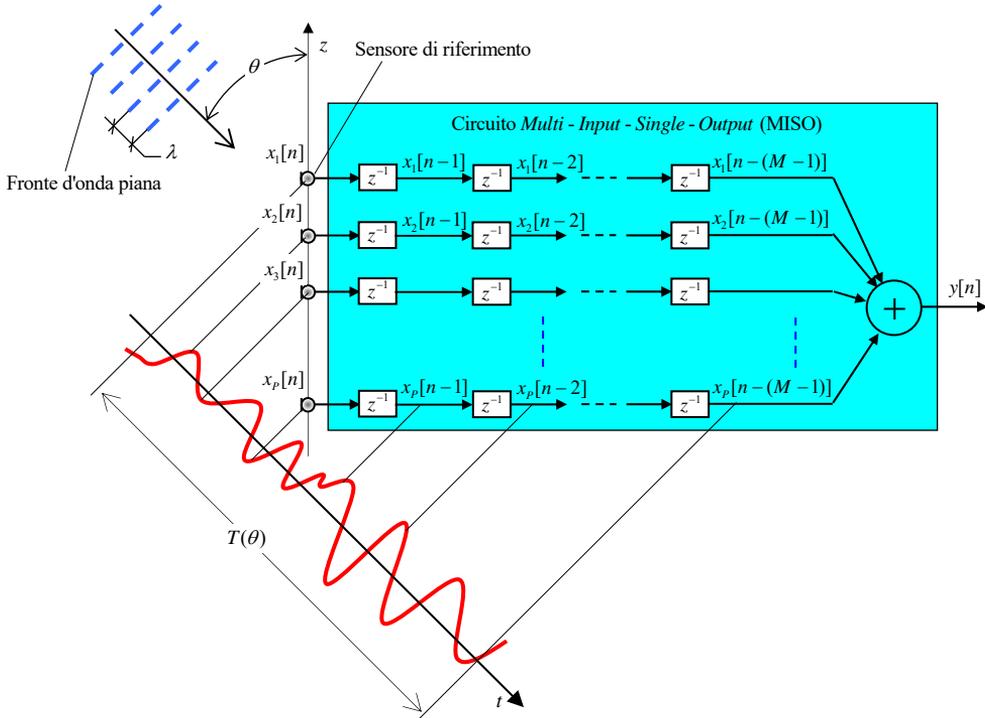


Figura 9.12 Rappresentazione del campionamento spazio-temporale con FSBF.

9.3 Caratteristiche del campo di rumore e indici di qualità

Modello generale

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}[n]$$

$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\omega, \theta) \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P \times N}$ **modello anecoico** $N = N_s$, **modello riverberante** $N = N_a N_s$

- **Weight and Sum BF**
- **Filter and Sum BF**

9.3.1 Matrice di covarianza spaziale e operatori di proiezione

Matrice di covarianza spaziale $\mathbf{R}_{xx} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P \times P} \triangleq E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx} &= E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} \\ &= E\{(\mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}[n])(\mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}[n])^H\} \\ &= \mathbf{A}E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\}\mathbf{A}^H + E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{nn} \end{aligned} \tag{9.38}$$

$$\mathbf{R}_{ss} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{N \times N} = E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\} \quad \text{covarianza della sorgente} \tag{9.39}$$

$$\mathbf{R}_{nn} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{N \times N} = E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} \quad \text{covarianza del rumore} \tag{9.40}$$

Nel dominio della frequenza le matrici di covarianza \mathbf{R}_{xx} , e \mathbf{R}_{nn} , (vere o stimate su medie temporali), sono indicate, rispettivamente, come

$$\mathbf{R}_{xx}(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}] = \begin{bmatrix} R_{x_1 x_1}(e^{j\omega}) & \cdots & R_{x_1 x_p}(e^{j\omega}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{x_p x_1}(e^{j\omega}) & \cdots & R_{x_p x_p}(e^{j\omega}) \end{bmatrix} \tag{9.41}$$

$$\mathbf{R}_{nn}(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\}] = \begin{bmatrix} R_{n_1 n_1}(e^{j\omega}) & \cdots & R_{n_1 n_p}(e^{j\omega}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n_p n_1}(e^{j\omega}) & \cdots & R_{n_p n_p}(e^{j\omega}) \end{bmatrix} \tag{9.42}$$

Le precedenti sono matrici di densità spettrale di potenza o PSD definite proprio come DTFT della sequenza di autocorrelazione (Cfr. §1.2.6.5).

9.3.1.1 Rumore spazialmente bianco

Il rumore si *dice spazialmente bianco* se è a media nulla, non correlato e della stessa potenza, o omogeneo, su tutti i sensori. In tal caso la matrice di covarianza risulta

$$\mathbf{R}_{nn} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P \times P} = E\{\mathbf{nn}^H\} = \begin{bmatrix} r_{n_1 n_1} & \cdots & r_{n_1 n_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n_p n_1} & \cdots & r_{n_p n_p} \end{bmatrix} = \sigma_n^2 \mathbf{I}. \quad (9.43)$$

Nel caso di rumore omogeneo ma non bianco si può procedere con una pesatura detta di “**sbiancamento**”. Più specificamente il segnale proveniente dai sensori sono moltiplicati per $\mathbf{R}_{nn}^{-1/2}$ (radice quadrata Hermitiana di \mathbf{R}_{nn}^{-1}) prima del processamento.

9.3.1.2 Fattorizzazione spettrale della matrice di covarianza spaziale

La *fattorizzazione spettrale* di $\mathbf{R}_{xx} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P \times P}$ è di centrale importanza per molti sviluppi teorici e può essere espressa come

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{nn} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H \quad (9.44)$$

è possibile partizionare gli autovettori e autovalori appartenenti al segnale ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \geq \sigma_n^2$) e appartenenti al rumore $\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots, \lambda_P = \sigma_n^2$. Pertanto è possibile scrivere

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{U}_n^H \quad (9.45)$$

in cui $\mathbf{\Lambda}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$. Poiché gli autovettori del rumore sono ortogonali ad \mathbf{A} , le colonne di \mathbf{U}_s rappresentano uno *span* per l'*immagine* (o *spazio colonna*) di \mathbf{A} indicato come $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, mentre quelle di \mathbf{U}_n uno *span* per il suo complemento ortogonale, ovvero lo *spazio nullo* (o *kernel*) di \mathbf{A} indicato come $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ (Cfr. §A.6).

9.3.1.3 Operatori di proiezione

Gli *operatori di proiezione* (vedi anche Cfr. §4.2.4.2) sullo spazio del segnale e su quello del rumore sono quindi definiti come

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H = \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \quad \text{proiezione su } \mathcal{R}(\mathbf{A}) \quad (9.46)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \quad \text{proiezione su } \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \quad (9.47)$$

per cui $\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}$.

Si osservi che gli operatori di proiezione sono utili sia nello sviluppo sia nella interpretazione geometrica degli algoritmi di adattamento discussi nel seguito.

9.3.1.4 Rumore isotropico a simmetria sferica e cilindrica

Rumore isotropico (da tutte le direzioni) s'intende quello a simmetria sferica,

$N(e^{j\omega}, \theta)$ la potenza normalizzata di rumore isotropici è definita come

$$N(e^{j\omega}, \theta) \therefore \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N(e^{j\omega}, \theta) \sin \theta \cdot d\theta d\phi = 1. \quad (9.48)$$

Rumore isotropico a simmetria cilindrica. $N_C(e^{j\omega}, \phi)$, è definito come

$$N_C(e^{j\omega}, \phi) \therefore \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_C(e^{j\omega}, \phi) d\phi = 1. \quad (9.49)$$

Si osservi che il rumore a simmetria cilindrica risulta essere più appropriato in particolari ambienti di propagazione.

Un esempio si ha nell'acustica riverberante tipica di un ambiente confinato quando il pavimento e il soffitto sono trattati con materiali fono assorbenti. In questo caso la componente di rumore può essere modellata con la sola componente sul piano azimutale senza tener conto dell'elevazione.

9.3.2 Caratteristiche del campo di rumore

Il progetto dell'AP dipende dalle caratteristiche del campo di rumore.

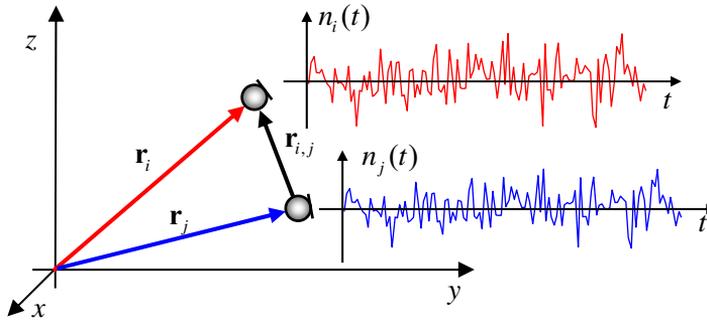


Figura 9.13 Due sensori vicini immersi in un campo di rumore possono ricevere dati più o meno simili. Nel caso di segnali acquisiti fortemente correlati il campo è detto *coerente*. *Incoerente* nel caso contrario.

Consideriamo due processi aleatori stazionari e spazialmente distinti, acquisiti da due sensori posti nelle coordinate \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j e indicati, direttamente a tempo discreto, come $n_i[n]$ e $n_j[n]$, e con correlazioni $r_{n_k n_k}[n] = E\{n_k[n]n_k^*[n-l]\}$, per $k = i, j$.

Coherence function

$$\gamma_{n_i n_j}(e^{j\omega}) \triangleq \frac{R_{n_i n_j}(e^{j\omega})}{\sqrt{R_{n_i n_i}(e^{j\omega})R_{n_j n_j}(e^{j\omega})}} \quad (9.50)$$

Magnitude Square Coherence (MSC).

$$C_{n_i n_j}(e^{j\omega}) = |\gamma_{n_i n_j}(e^{j\omega})|^2,$$

Ricordiamo che:

- la funzione di coerenza può essere interpretata come una correlazione nel dominio della frequenza e dello spazio.
- Infatti, se $n_i[n] \approx n_j[n]$ ne segue che $\gamma_{n_i n_j}(e^{j\omega}) \approx 1$, ovvero si ha la massima correlazione (somiglianza); viceversa se $n_i[n]$ non è correlato a $n_j[n]$ si ha $\gamma_{n_i n_j}(e^{j\omega}) \approx 0$.
- Vale, allora, $0 \leq |\gamma_{n_i n_j}(e^{j\omega})| \leq 1$ per ogni frequenza.

9.3.2.1 Campo coerente

Segnali molto correlati per cui $\gamma_{n,n_j}(e^{j\omega}) \approx 1$. Tale situazione è tipica quando la radiazione non è soggetta a riflessioni o a forti dissipazioni dovute alla propagazione.

- Nel caso di array microfonici il campo è (quasi) coerente in ambienti non confinati come in aria aperta o in camere anecoiche (ambienti confinati in cui le onde acustiche vengono assorbite dalle pareti per tutte le lunghezze d'onda).

9.3.2.2 Campo incoerente

Segnali non correlati per cui $\gamma_{n,n_j}(e^{j\omega}) \approx 0$. Per esempio, il rumore elettrico dei sensori risulta essere quasi sempre di natura incoerente. Si osservi che, il campo incoerente è di tipo spazialmente bianco.

9.3.2.3 Campo diffuso

Un campo diffuso è caratterizzato da:

- un segnale sui sensori poco correlato;
- proveniente simultaneamente, con lo stesso livello energetico, da tutte le direzioni con simmetria sferica o cilindrica.

La dipendenza dalle caratteristiche di rumore è particolarmente importante nel caso di array microfonici usati prevalentemente per lo *speech enhancement*.

Ambienti acustici tipici come uffici, autoveicoli ecc, possono essere caratterizzati da un certo campo diffuso. In questi casi la coerenza tra i rumori acquisiti da due sensori i e j è funzione della distanza tra i sensori $d_{ij} = |\mathbf{r}_{i,j}|$, e della frequenza acquisita.

Nel caso di sensore isotropico la funzione coerenza tra due sensori è una funzione pari a

$$\gamma_{n,n_j}(e^{j\omega}) = \frac{\sin(kd_{ij})}{kd_{ij}}. \quad (9.51)$$

Risulta perciò che nel caso di microfoni molto vicini, ovvero in termini di lunghezza d'onda per $\frac{2\pi}{\lambda} d_{ij} \rightarrow 0$, il campo risulta 'abbastanza' coerente.

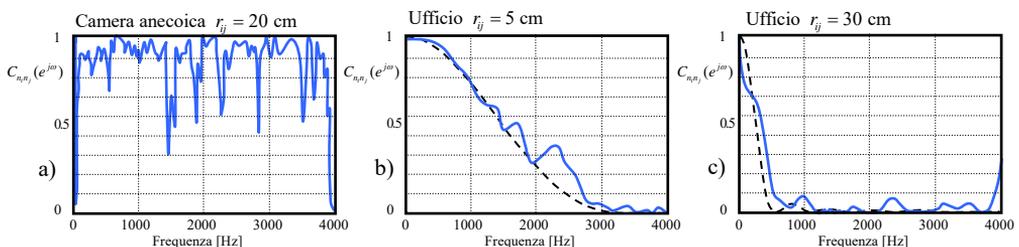


Figura 9.14 Esempi di *magnitude square coherence* per ambienti acustici tipici: a) camera anecoica; b) ufficio con microfoni distanti 5 cm; c) ufficio con microfoni distanti 30 cm (tratte da [6]).

Matrice di coerenza, caratterizzata da una diagonale unitaria e simmetria Toeplitz, come

$$\mathbf{\Gamma}_{nn}(e^{j\omega}) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{n_1 n_2}(e^{j\omega}) & \cdots & \gamma_{n_1 n_p}(e^{j\omega}) \\ \gamma_{n_2 n_1}(e^{j\omega}) & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \gamma_{n_{p-1} n_p}(e^{j\omega}) \\ \gamma_{n_p n_1}(e^{j\omega}) & \cdots & \gamma_{n_p n_{p-1}}(e^{j\omega}) & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.52)$$

Un campo di rumore è detto omogeneo se la PSD che lo caratterizza non dipende dalla posizione spaziale del sensore. Per esempio, il campo incoerente o diffuso è spazialmente bianco, è per definizione omogeneo.

Nel caso di rumore omogeneo tutti i sensori sono caratterizzati dalla stessa PSD di rumore, ovvero $R_{n_i n_i}(e^{j\omega}) = R_n(e^{j\omega})$, $i = 1, 2, \dots, P$. Ne segue la funzione di coerenza risulta, in questo caso, definita come

$$\gamma_{n_i n_j}(e^{j\omega}) \triangleq \frac{R_{n_i n_j}(e^{j\omega})}{R_n(e^{j\omega})}. \quad (9.53)$$

9.3.2.4 Campo di rumore combinato

Per array microfonici operanti in ambienti confinati, il campo di rumore può essere definito di tipo combinato.

- La distanza tra le fonti di disturbo dai microfoni e i coefficienti di riflessione delle pareti determinano, infatti, un percorso diretto del rumore sovrapposto a un rumore incoerente e diffuso.
- La schiera dovrà, quindi, essere progettata in modo da operare correttamente indipendentemente dalle caratteristiche del campo di rumore.

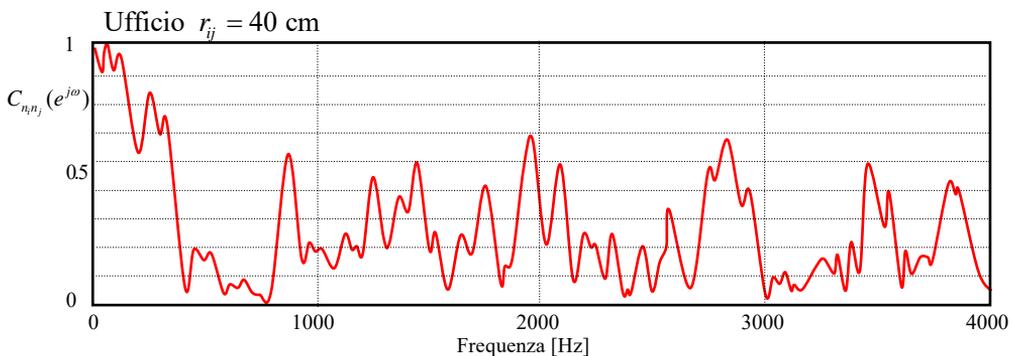


Figura 9.15 MSC con microfoni distanti 40 cm per ambiente acustico tipico con campo di rumore combinato ([6]).

9.3.3 Parametri di qualità e sensibilità dell'array

Definiamo alcuni parametri caratteristici per la definizione della qualità dell'array

Relazioni di IN e OUT nel tempo

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}(\omega, \theta)\mathbf{s} + \mathbf{n}[n].$$

$$y[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{w}.$$

Relazioni di IN e OUT in frequenza

$$X = \mathbf{a}(\omega, \theta)S + N$$

$$Y = \mathbf{W}^H X$$

(9.54)

Relazioni di IN-OUT nel tempo e in frequenza

$$y[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)\mathbf{s} + \mathbf{w}^H \mathbf{n}$$

(9.55)

$$Y = \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)S + \mathbf{W}^H N$$

(9.56)

con $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{(P(M) \times 1)} = \begin{bmatrix} W_1(e^{j\omega}) & \dots & W_P(e^{j\omega}) \end{bmatrix}_{P \times 1}^T$.

WSBF vale $\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{a}(\omega, \theta) \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{(P \times 1)}$

FSBF vale $\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{a}(\omega, \theta) \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{(P(M) \times 1)}$

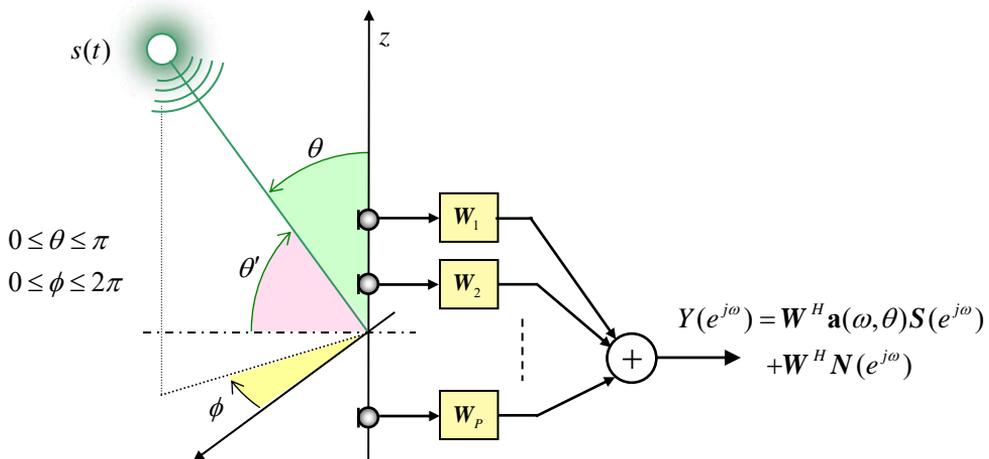


Figura 9.16 Beamformer generico, **WSBF** o **FSBF**, usato come riferimento per la definizione delle specifiche di qualità.

9.3.3.1 Rapporto segnale rumore ingresso e in uscita del BF

Il *rapporto segnale rumore in ingresso* (SNR_{IN}) valutato considerando la presenza di un solo sensore isotropico posto al centro della schiera.

$$SNR_{IN} = \frac{E\{S(e^{j\omega})S^*(e^{j\omega})\}}{E\{N(e^{j\omega})N^*(e^{j\omega})\}} = \frac{R_s(e^{j\omega})}{R_n(e^{j\omega})} \quad (9.57)$$

$R_s(e^{j\omega})$ rappresenta la PSD del segnale

$R_n(e^{j\omega})$ la PSD del rumore valutati in media all'ingresso del BF.

Indicando, con σ_s^2 e σ_n^2 le varianze rispettivamente del segnale e del rumore abbiamo che

$$SNR_{IN} = \sigma_s^2 / \sigma_n^2 \quad (9.58)$$

definito come *rapporto segnale rumore medio* in ingresso.

Espressione della PSD d'ingresso per un solo segnale, evidenziando le varianze del segnale e del rumore, nella forma

$$\mathbf{R}_{xx}(e^{j\omega}) \triangleq E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^H\} = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega, \theta) \mathbf{a}^H(\omega, \theta) + \sigma_n^2 \hat{\mathbf{R}}_{mn}(e^{j\omega}) \quad (9.59)$$

$\hat{\mathbf{R}}_{mn}(e^{j\omega}) \triangleq \mathbf{R}_{mn}(e^{j\omega}) / \sigma_n^2$ matrice PSD di covarianza del rumore normalizzata in modo tale che la sua traccia¹ sia pari al numero di sensori P .

Il *rapporto segnale rumore in uscita* (SNR_{OUT})

$$\begin{aligned} R_y(e^{j\omega}) &\triangleq E\{Y(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})\} \\ &= \sigma_s^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)|^2 + \sigma_n^2 \mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_{mn}(e^{j\omega}) \mathbf{W} \end{aligned} \quad (9.60)$$

termine è relativo al solo segnale utile $\sigma_s^2 |\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)|^2$;

termine relativo al solo rumore $\sigma_n^2 \mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_{mn}(e^{j\omega}) \mathbf{W}$ è .

L' SNR_{OUT} risulta

$$SNR_{OUT} \triangleq \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \cdot \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)|^2}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_{mn}(e^{j\omega}) \mathbf{W}} \quad (9.61)$$

Il *rapporto segnale rumore in uscita in funzione dell' SNR_{IN}*

¹ Si osservi che detto $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P \times 1}$, risulta $\text{Tr}\left[E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} / \left(\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{P}\right)\right] \sim P$.

Indicando con \mathbf{A} la matrice $\mathbf{A} \triangleq \mathbf{a}(\omega, \theta) \mathbf{a}^H(\omega, \theta)$ la precedente è scritta come

$$SNR_{OUT} = SNR_{IN} \cdot \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_{nn}(e^{j\omega}) \mathbf{W}}. \quad (9.62)$$

9.3.3.2 Funzioni di radiazione

Funzione di trasferimento definita come

$$\begin{aligned} R(e^{j\omega}, \theta) &\triangleq \frac{Y(e^{j\omega}, \theta)}{S(e^{j\omega})} \\ &= \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta) \end{aligned} \quad (9.63)$$

$S(e^{j\omega})$ rappresenta il segnale all'ingresso del beamformer ricevuto da un sensore isotropico posto al centro della geometria dell'array, considerando il modello di propagazione anecoico.

Diagramma di radiazione

Modulo della funzione di radiazione normalizzata rispetto alla direzione di massimo guadagno.

Per cui, detto $\theta_{\max} \triangleq \max_{\theta} |R(e^{j\omega}, \theta)|$, avremo

$$R_d(e^{j\omega}, \theta) = |R(e^{j\omega}, \theta)| / |R(e^{j\omega}, \theta_{\max})|. \quad (9.64)$$

Per esempio, i diagrammi di radiazione dei sensori riportati sono valutati con la (9.64) espressa in dB.

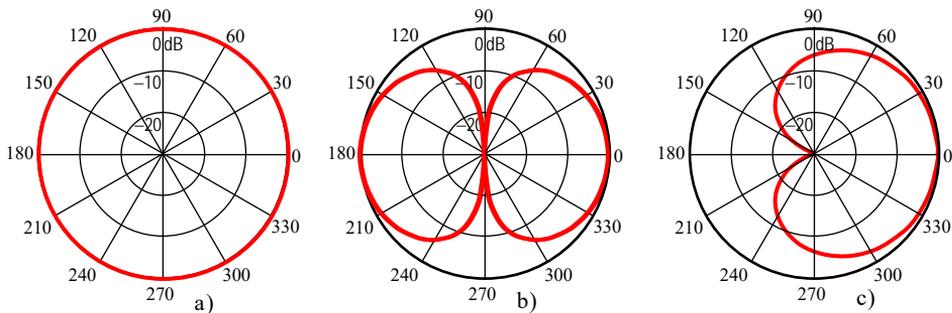


Diagramma di potenza: *spatial directivity spectrum*

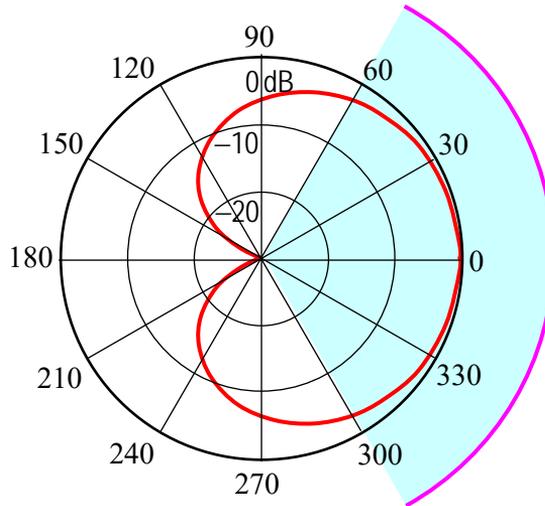
Si definisce *diagramma di potenza* o *Spatial Directivity Spectrum* (SDS) il quadrato dell'ampiezza del diagramma di radiazione $|R(e^{j\omega}, \theta)|^2$. Per cui, considerando l'espressione (9.63), risulta

$$\begin{aligned} |R(e^{j\omega}, \theta)|^2 &= |\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)|^2 \\ &= \mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (9.65)$$

Si osservi che essendo A complessa questa può essere scomposta nelle parti reale ed immaginaria come $A = A_R + jA_I$ dove la parte immaginaria è anti simmetrica per cui $\mathbf{w}^T A_I(\omega, \theta) \mathbf{w} = 0$. Per cui possiamo scrivere $|R(e^{j\omega}, \theta)|^2 = \mathbf{w}^T A_R(\omega, \theta) \mathbf{w}$ [12].

Risposta spaziale a -3dB

Definiamo la **larghezza del lobo principale** come la regione intorno al massimo della risposta con ampiezza $> -3\text{dB}$.



9.3.3.3 Guadagno dell'array

Il **guadagno d'array (array gain) o direttività** è definito come il miglioramento del rapporto segnale rumore tra ingresso e l'uscita del BF per una certa direzione

$$G(e^{j\omega}, \theta_0) \triangleq \frac{SNR_{OUT}}{SNR_{IN}} \quad (9.66)$$

per cui dalla (9.62) vale

$$G(e^{j\omega}, \theta_0) = \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta_0)|^2}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega}) \mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega}) \mathbf{W}} \quad (9.67)$$

Il guadagno dell'array dipende

- **caratteristiche dell'array, descritte da A e W**
- **dal campo di rumore definite dalla matrice $\hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega})$.**

Caso di rumore isotropico a simmetria sferica

Nel caso di rumore isotropico a simmetria sferica, il guadagno di array lungo la direzione θ_0 , esplicitando l'espressione del rumore l'espressione (9.48), può essere definito come

$$G(e^{j\omega}, \theta_0) \triangleq \frac{SNR_{OUT}}{SNR_{IN}} = \frac{|R(e^{j\omega}, \theta_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |R(e^{j\omega}, \theta)|^2 N(e^{j\omega}, \theta) \sin \theta \cdot d\theta d\phi} \quad (9.68)$$

dove con θ_0 si intende la direzione di osservazione o *steering direction* indicata anche come *Main Response Axis* (MRA). Combinando con la (9.67), osserviamo che la matrice di correlazione di rumore normalizzata può essere definita come

$$\hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{A}(e^{j\omega}, \theta) N(e^{j\omega}, \theta) \sin \theta \cdot d\theta d\phi. \quad (9.69)$$

Nel caso di antenne trasmettenti, $G(e^{j\omega}, \theta)$ rappresenta la massima intensità di radiazione (potenza per angolo solido) diviso per la radiazione media sull'intero angolo sferico. Nel caso ricevente, il denominatore rappresenta la potenza d'uscita dovuta al rumore intorno al sensore con una certa distribuzione $N(e^{j\omega}, \theta)$ spaziale intorno alla sfera.

Caso di rumore isotropico a simmetria cilindrica

Nel caso di rumore isotropico a simmetria cilindrica, per la (9.49), il guadagno di array risulta definito come

$$G_C(e^{j\omega}, \theta_0) \triangleq \frac{SNR_{OUT}}{SNR_{IN}} = \frac{|R(e^{j\omega}, \theta_0)|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |R(e^{j\omega}, \theta)|^2 N_C(e^{j\omega}, \phi) d\phi} \quad (9.70)$$

per cui, analogamente alla (9.69) possiamo scrivere

$$\hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(e^{j\omega}, \theta) N_C(e^{j\omega}, \phi) d\phi. \quad (9.71)$$

Se non diversamente specificato per guadagno di array si intende l'espressione (9.68), ovvero rumore a simmetria sferica.

Osservazione

Il guadagno dell'array è tanto più elevato quanto più la $\hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega})$ è piccola.

Guadagno grande se i sensori ricevono rumore il più possibile incorrelato.

La condizione per cui è conveniente l'utilizzo di un array, piuttosto che un unico ricevitore, è quella che risulti una certa *diversità spaziale* tra i sensori.

Nel beamforming è importante considerare il **guadagno di array in funzione** delle particolari **caratteristiche del campo di rumore**.

L'**array gain** viene definito secondo il tipo di campo

- **Campo di rumore Coerente**
- **Campo di rumore Incoerente**

- **Campo di rumore diffuso.**

Campo di rumore omogeneo

$\Gamma_m(e^{j\omega})$ la matrice di coerenza, nel caso di rumore omogeneo

$$G(e^{j\omega}, \theta_0) = \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta_0)|^2}{\mathbf{W}^H \Gamma_m(e^{j\omega}) \mathbf{W}}. \quad (9.72)$$

Indice di direttività per campo di rumore diffuso

$\Gamma_{nn}^{diffuso}$ la matrice di coerenza, nel caso di rumore diffuso (caso acustico)

Si definisce *indice di direttività* o *Directivity Index (DI)* la quantità

$$DI(e^{j\omega}) \triangleq \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta_{\max})|^2}{\mathbf{W}^H \Gamma_{nn}^{diffuso}(e^{j\omega}) \mathbf{W}} \quad (9.73)$$

dove gli elementi della matrice $\Gamma_{nn}^{diffuso}(e^{j\omega})$ sono $\gamma_{n_i n_j}(e^{j\omega}) \approx \text{sinc}(\frac{\omega d_{ij}}{c})$ valutati con la (9.51). In genere si considera la grandezza in dB, $DI_{dB} = 10 \log_{10}[DI(e^{j\omega})]$.

Campo di rumore incorrelato: guadagno di rumore bianco

Rumore sia spazialmente bianco o incorrelato $\Gamma_{nn}(e^{j\omega}) \equiv \hat{\mathbf{R}}_{nn}(e^{j\omega}) = \mathbf{I}$,

$$GW(e^{j\omega}) = \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{W}} \quad (9.74)$$

dove $GW(e^{j\omega})$ è definito *guadagno di rumore bianco*. Si osservi, come meglio vedremo nel seguito, che in alcuni tipi di beamformer si assume il vincolo $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega, \theta) = 1$.

In questo caso, il guadagno di rumore bianco risulta pari a $GW(e^{j\omega}) = \|\mathbf{w}\|^{-2}$. Per esempio, nel caso del WSB di Figura 9.10, con pesi tutti uguali, risulta $GW(e^{j\omega}) = P$.

Guadagno geometrico

Nel caso di rumore sfericamente isotropico, la matrice di rumore è indicata come $\mathbf{Q}_g(e^{j\omega})$ per enfatizzare la **dipendenza dalla geometria dell'array** [23]. In questo caso il corrispondente guadagno, detto *guadagno geometrico*, è indicato come

$$G_G(e^{j\omega}, \theta) = \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)|^2}{\mathbf{W}^H \mathbf{Q}_g(e^{j\omega}) \mathbf{W}}. \quad (9.75)$$

Rapporto di superguadagno

Si definisce fattore Q_a o **rapporto di superguadagno**, che rappresenta una misura alternativa della **sensibilità dell'array**, come rapporto tra il guadagno geometrico e il guadagno di rumore bianco; ovvero

$$Q_a(e^{j\omega}, \theta) \triangleq \frac{G_G(e^{j\omega}, \theta)}{GW(e^{j\omega}, \theta)} = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{Q}_g \mathbf{W}}. \quad (9.76)$$

La quantità $G(e^{j\omega}, \theta)/GW(e^{j\omega}, \theta)$ è definita come *rapporto di superguadagno generalizzato*.

9.3.3.4 Sensibilità

Consideriamo **una perturbazione dell'array**, per esempio uno spostamento casuale di un sensore, come un segnale di errore ξ a media nulla con varianza normalizzata $\mathbf{Q}_\xi(e^{j\omega})$ e tale che la matrice di covarianza del segnale utile diventi $\sigma_s^2(|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)|^2 + \xi \mathbf{Q}_\xi(e^{j\omega}))$. Si definisce sensibilità del guadagno dell'array rispetto al disturbo ξ come

$$S = \left(\frac{dG/d\xi}{G} \right) = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{Q}_\xi(e^{j\omega}) \mathbf{W}}{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)|^2} = \frac{1}{G_\xi}. \quad (9.77)$$

Per disturbi incorrelati per cui $\mathbf{Q}_\xi(e^{j\omega}) = \mathbf{I}$, per la (9.74), la sensibilità è il reciproco del guadagno di rumore bianco ($S_w = G_w^{-1}$) che è, per questo motivo, assunta come classica misura della sensibilità dell'array. Il *guadagno di rumore bianco* rappresenta, quindi, la misura che di solito viene riferita alla robustezza dell'array.

9.4 Beamforming convenzionale

Fixed beamforming (data independent)

- ritardi e somme o *Delay & Sum BF (DSBF)*;
- differenziali o *delay & subtract*;
- ritardi e somme pesate o *Delay & Weighted Sum Beamforming (DWSB)*;
- filtraggio e somma o *Filter & Sum Beamforming (FSBF)*.

Il DSBF è l'analogo del filtro in media mobile dei circuiti TD e in pratica non si effettua alcun processo di elaborazione sui singoli canali che vengono semplicemente sommati.

È possibile determinare i parametri \mathbf{w} tali da sintetizzare una risposta spazio-frequenza desiderata, secondo un opportuno criterio di ottimizzazione.

9.4.1 Beamforming convenzionale: DSBF-ULA

9.4.1.1 Diagramma di radiazione

La **funzione di radiazione** dell'array $R(e^{j\omega}, \theta)$, rappresenta la **risposta del filtro nel dominio spaziale** per un segnale sinusoidale di una determinata frequenza, in funzione dell'angolo di arrivo.

Per un array ULA il diagramma di radiazione, è definito come

$$R(e^{j\omega}, \theta) = \mathbf{w}^H \mathbf{a}_{ULA}(\omega, \theta) = \sum_{m=1}^P w_m^* e^{-jk(m-1)d \cos \theta} \quad (9.78)$$

quest'ultima è, infatti, proprio la DTFT della risposta (spaziale) del filtro spaziale. Si osservi che, nel caso di pesi unitari possiamo valutare (9.78), in forma chiusa come

$$R(e^{j\omega}, \theta) = \sum_{m=1}^P \frac{1}{e^{jk(m-1)d \cos \theta}} = \frac{1 - e^{-jkPd \cos \theta}}{1 - e^{-jkd \cos \theta}} \quad (9.79)$$

per cui diagramma di radiazione per $\tau = (d \cos \theta)/c$, vale

$$\left| R(e^{j\omega}, \theta) \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{kPd}{2} \cos \theta\right)}{\sin\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right)} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2} P\omega\tau\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \omega\tau\right)} \right|. \quad (9.80)$$

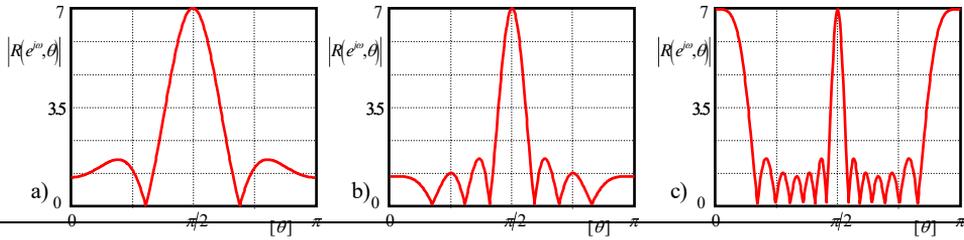


Figura 9.17 Beampattern di un array a banda stretta, con direzione dell'onda incidente perpendicolare alla linea dell'array o 'broadside' ($\theta = 90^\circ$): $P = 7$; pesi unitari. Distanza tra i sensori a) $d = \lambda/4$; b) $d = \lambda/2$; c) $d = \lambda$.

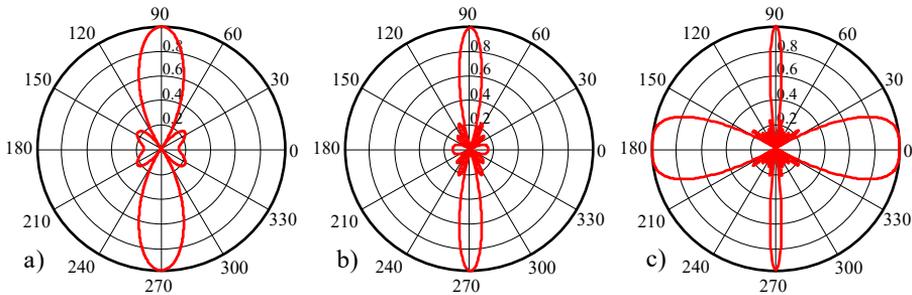


Figura 9.18 Diagrammi di direttività in forma polare normalizzata per array lineari a banda stretta descritti negli esempi a), b) e c) di Figura 9.17.

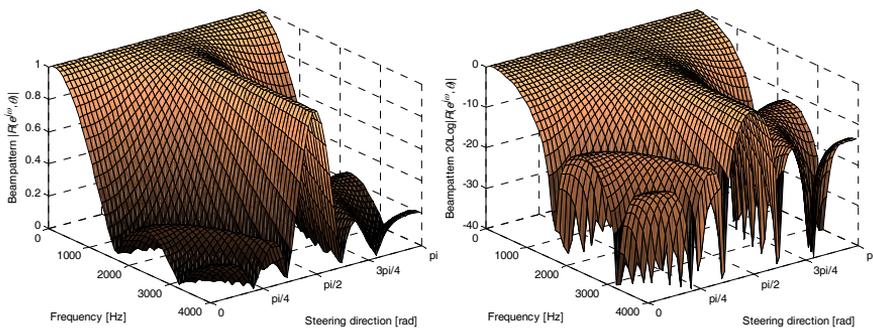


Figura 9.19 Beampattern normalizzato, in valori naturali e in dB, in funzione della frequenza, per $P = 5$, $d = 4.3$ cm e $F_c = 8$ kHz.

9.4.1.2 Guadagni del DSBF

Nel caso di onda con $\text{DOA} = \theta_0$ il ritardo tra i sensori è nullo per cui, indicando il vettore di P elementi unitari come $\mathbf{1} \triangleq [1 \ \cdots \ 1]_{P \times 1}^T$, risulta $\mathbf{a}(\omega, \theta_0) = \mathbf{1}$. Si osservi, come illustrato in Figura 9.17, che nel caso di beamformer DSBF con pesi unitari, nella direzione di massimo guadagno la risposta $R(\omega, \theta_0)$, è pari proprio al numero di sensori, ovvero $\mathbf{w}^T \mathbf{a}(\omega, \theta_0) = P$. In altre situazioni è usuale imporre a θ_0 un guadagno unitario per cui vale $\mathbf{w}^T \mathbf{a}(\omega, \theta_0) = 1$. Ciò è equivalente a imporre dei pesi pari a

$$\mathbf{w} = \mathbf{1}/P. \quad (9.81)$$

In entrambe le situazione descritte, ovvero per pesi costanti di qualunque valore, il lettore può facilmente verificare che, detta $\mathbf{1}_{P \times P} = \mathbf{1}_{P \times 1} \cdot \mathbf{1}_{P \times 1}^T$ la matrice di elementi unitari, per il guadagno definito in (9.67) risulta

$$G(e^{j\omega}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{1}_{P \times P} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \hat{\mathbf{R}}_{mm}(e^{j\omega}) \mathbf{w}} \quad (9.82)$$

mentre per guadagno di rumore bianco (9.74) vale,

$$GW(e^{j\omega}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{1}_{P \times 1} \cdot \mathbf{1}_{P \times 1}^T \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} = P. \quad (9.83)$$

Nel caso di rumore spazialmente bianco, ovvero rumore Gaussiano proveniente da tutte le direzioni o isotropico, il DSBF massimizza il guadagno di rumore bianco $GW(e^{j\omega})$.

Nel caso di campo di rumore incoerente dalla (9.67), la riduzione di rumore raggiungibile è in pratica equivalente all'inverso del diagramma di radiazione.

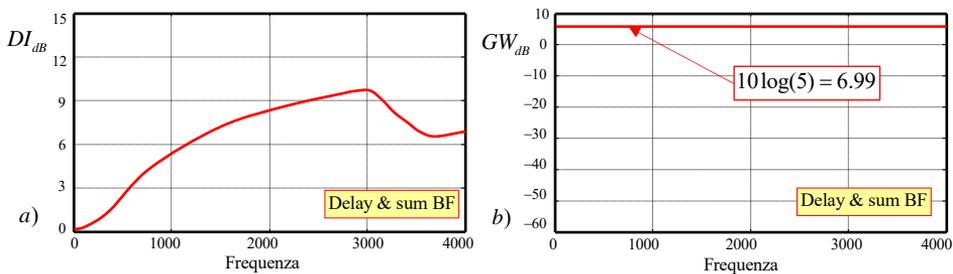


Figura 9.20 Andamento degli indici di: a) direttività; b) guadagno di rumore bianco. Per un array di microfoni ULA-DSBF con $P = 5$, $d = 5\text{cm}$ e $f_c = 8\text{kHz}$.

Nel caso di campo diffuso, si osservi che le prestazioni tendono a degradare alle basse frequenze in quanto il rumore acquisito dai microfoni, quando $d \ll \lambda$, tende a diventare spazialmente coerente.

Dalla (9.51) infatti, la matrice $\Gamma_{nn}^{diffuso}(e^{j\omega})$ tende a diventare con tutte colonne unitarie. Per la (9.73), quando $\mathbf{a}(\omega, \theta_0) = \mathbf{1}$, risulta quindi

$$DI(e^{j\omega}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{1}_{P \times P} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{1}_{P \times P} \mathbf{w}} = 1 \Rightarrow DI_{dB}(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{per } \omega \rightarrow 0. \quad (9.84)$$

In Figura 9.20-a) è riportato l'andamento tipico dell'indice di direttività (9.73) DI_{dB} calcolato nella direzione broad-side, in funzione della frequenza, per un ULA di 5 microfoni distanziati di 5 cm. In Figura 9.20-b) è riportato il $GW_{dB}(e^{j\omega})$ relativo allo stesso array. Dal punto di vista fisico, come già illustrato in Figura 9.19, alle basse frequenze l'ULA tende a perdere la direttività per cui acquisisce sia il segnale utile sia il rumore proveniente da tutte le direzioni.

Osservazione

Il DSBF è molto sensibile al rumore specialmente alle basse frequenze e per array con pochi elementi, inoltre, i DSBF sono molto sensibili alla dispersione delle caratteristiche dei sensori (guadagno, fase, posizione ecc). Per diminuire la coerenza alle basse frequenze, è conveniente allontanare il più possibile i sensori. Ciò suggerisce l'utilizzo di array diversi, opportunamente spazati, per ogni range di frequenza come gli ULA a distribuzione armonica descritti nel §9.2.3.4.

9.4.1.3 Orientazione del diagramma di radiazione: *steering delay*

Per cambiare l'orientazione della radiazione (o *steer*) e produrre un lobo con un angolo qualsiasi, oltre alla soluzione banale di girare fisicamente l'array, è possibile inserire artificialmente un ritardo, detto *steering delay*, al fine di orientare la risposta con un certo angolo $\theta \neq 0$ come indicato in Figura 9.21.

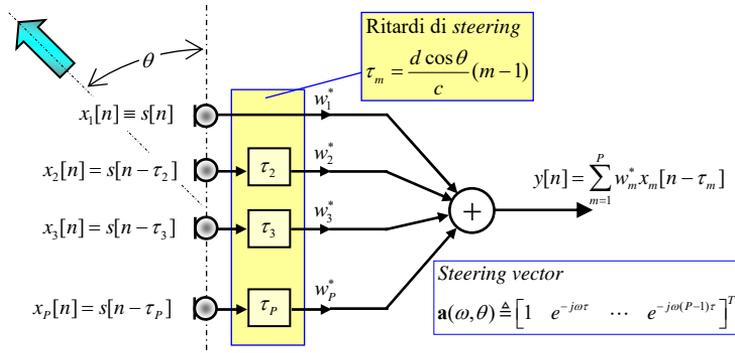


Figura 9.21 Onda incidente su un ULA con un angolo $\theta \neq 0$.

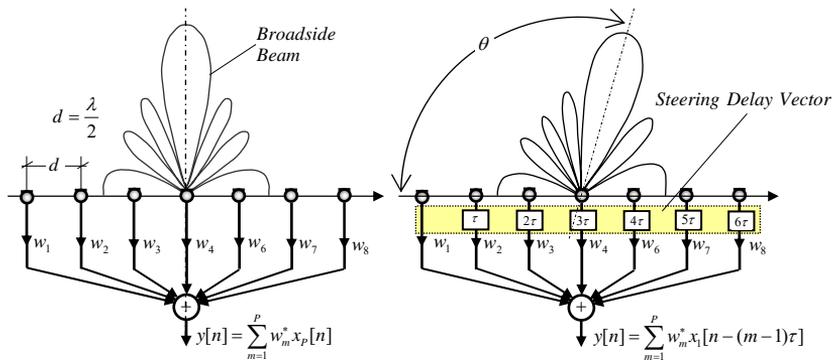


Figura 9.22 *Delay & sum beamformer* con orientazione del beampattern con inserimento di ritardi (*steering time delay*).

Nel caso di un ULA per una sola sorgente radiante lo *steering vector*, come già definito in (9.24), è definito come il vettore i cui elementi sono funzione dei ritardi di fase relativi a ogni ricevitore associati all'onda piana incidente con un angolo θ .

In Figura 9.22, a titolo di esempio, è illustrato un BF per segnali a banda stretta, in cui l'orientazione del lobo (*beam*) è determinata attraverso l'uso di *steering time delay* inseriti in ingresso a valle dei sensori.

Per un'onda piana incidente con sensore di riferimento a fase nulla per cui $x_1[n] \equiv s[n]$, con segnale a banda stretta definito, con le opportune ipotesi e semplificazioni, direttamente a tempo discreto come $s[n] = e^{j\omega n}$, l'uscita dell'array risulta

$$y[n] = \sum_{m=1}^P w_m^* x_m[n] = e^{j\omega n} \sum_{m=1}^P w_m^* e^{-j\omega(m-1)\tau} \quad (9.85)$$

che, nel caso di segnale sinusoidale e di array uniformemente spaziato, è equivalente ad un filtro FIR, definito nel dominio spaziale, con ritardo pari a $z^{-\tau}$. Il diagramma di radiazione del BF è espresso in funzione del ritardo τ di steering e dei pesi del beamformer e calcolato come $R(\omega, \theta) = \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega, \theta)$ e, in questo caso, definito dalla espressione (9.80).

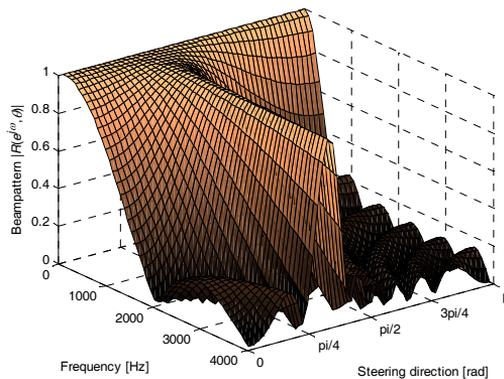


Figura 9.23 Diagramma di radiazione in valori naturali, per un ULA di $P = 8$ microfoni, distanti 4.3 cm, con frequenza di campionamento pari a $f_c = 8\text{kHz}$ e un angolo di steering pari a $\pi/3$.

In Figura 9.23, è riportato il grafico del diagramma di radiazione, in valori naturali, normalizzato per una schiera di microfoni ULA con $P = 8$, $d = 4.3$ cm, operante per frequenze audio con $f_c = 8\text{kHz}$ e un angolo di steering pari a 60° .

9.4.2 Microfoni differenziali (array quasi coincidente)

Un altro esempio di *data independent beamforming* consiste in un ULA con distanza tra i sensori tale che $d \ll \lambda$, ovvero sensori *quasi coincidenti* e una *look-direction* nella direzione *end-fire* $\theta_0 = 0$.

Nel caso di sensori acustici, il sistema è indicato come *array differenziale* o *array a gradiente* di microfoni (o altoparlanti) [15] implementati con la struttura di Figura 9.24.

Per questo tipo di array è possibile determinare dei pesi tali che la direttività, nel caso di rumore isotropico sferico, risulta essere proporzionale a P^2 .

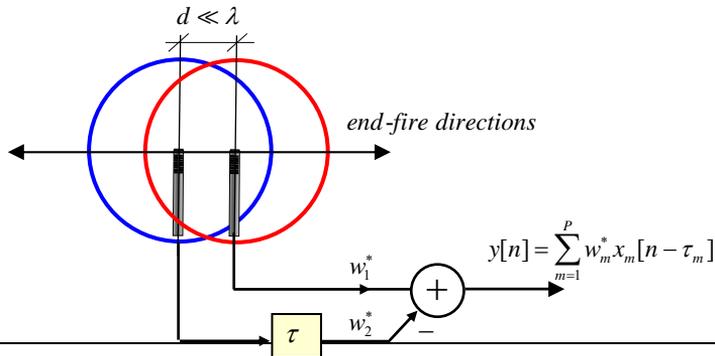


Figura 9.24 Esempio di microfono differenziale del primo ordine.

Il microfono è costruito con un array di P capsule omnidirezionali quasi coincidenti, ovvero poste a una distanza, il più possibile piccola, compatibilmente con le dimensioni meccaniche della struttura. L'ordine del microfono è pari a $P - 1$. Considerando il diagramma di radiazione $R(e^{j\omega}, \theta)$ nel caso $P = 2$ per $d \ll \lambda$, con l'approssimazione $\sin(a \cdot \cos(x)) \sim a \cdot \cos(x)$ per $a \rightarrow 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} R(e^{j\omega}, \theta) &= 1 - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta} \\ &= [1 - \cos(kd \cos \theta) + j \sin(kd \cos \theta)]. \\ &\approx kd \cos \theta \end{aligned} \quad (9.86)$$

Inserendo un ritardo di steering τ su uno dei microfoni tale che $\omega\tau \ll \lambda$, per $d \ll \lambda$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} R(e^{j\omega}, \theta) &= 1 - e^{-j\omega(\tau + \frac{d}{c} \cos \theta)} \\ &\approx \omega(\tau + \frac{d}{c} \cos \theta) \end{aligned} \quad (9.87)$$

Analizzando la $R(\omega, \theta)$ osserviamo che: nel dominio ω ha uno zero nell'origine e ha una risposta in frequenza con andamento passa-alto con pendenza 6dB/ott; nel dominio θ è caratterizzata da un diagramma polare del tipo $(\tau + \frac{d}{c} \cos \theta)$ che, per convenienza formale, è opportuno scrivere come

$$R(e^{j\omega}, \theta) = \alpha_1 + (1 - \alpha_1) \cos \theta. \quad (9.88)$$

dove, il lettore può facilmente verificare che, $\alpha_1 = \tau / (\tau + \frac{d}{c})$.

Per esempio, come illustrato in Figura 9.25, per $\alpha_1 = 0$ ($\tau = 0$) il diagramma polare è un dipolo; per $\alpha_1 = 0.5$ è un cardioide, mentre per $\alpha_1 < 0.5$ il diagramma è di tipo iper-cardioide ($\alpha_1 = 0.25$), super-cardioide ($\alpha_1 = (\sqrt{3}-1)/2$) ecc.

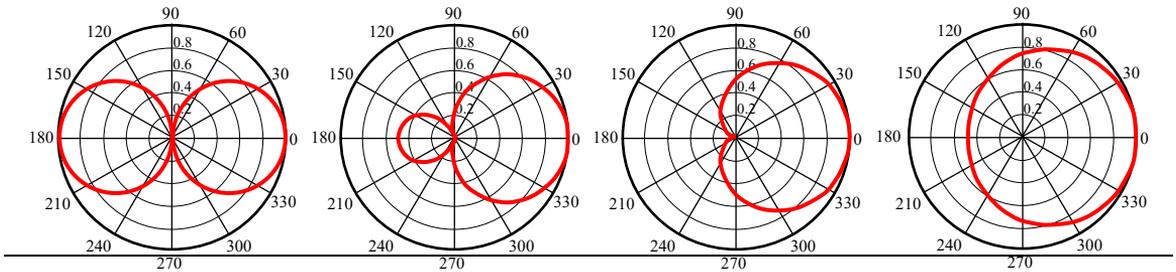


Figura 9.25 Esempi di diagrammi polari per microfono differenziale del primo ordine da sinistra per $\alpha_1 = 0, 0.25, 0.5, 0.75$.

Nel caso di $P > 2$ le espressioni (9.87)-(9.88) possono essere generalizzate come

$$\begin{aligned}
 R(e^{j\omega}, \theta) &= \prod_{i=1}^P [1 - e^{-j\omega(\tau_i + (d_i/c)\cos\theta)}] \\
 &\approx \omega^P \prod_{i=1}^P [\tau_i + (d_i/c)\cos\theta]
 \end{aligned} \tag{9.89}$$

e

$$R(e^{j\omega}, \theta) \approx \omega^P \prod_{i=1}^P [\alpha_i + (1 - \alpha_i)\cos\theta].$$

Quest'ultima può essere scritta come serie di potenze del tipo

$$R(e^{j\omega}, \theta) \approx A\omega^P (a_0 + a_1 \cos\theta + \dots + a_p \cos^p\theta) \quad \text{con} \quad \sum_i a_i = 1. \tag{9.90}$$

Inserendo oltre ai ritardi, anche dei pesi complessi, è possibile ottenere dei BF con beampattern approssimanti opportune maschere. Come meglio vedremo nel seguito, il progetto è molto simile a quello dei filtri numerici per cui possiamo ottenere delle risposte di tipo *max-flat*, *equi-ripple* ecc.

9.4.3 Beamformer a banda larga con decomposizione spettrale

Trasformazione in frequenza dell'ingresso (con *sliding transform* DFT o FFT)

Beamforming a banda larga $\rightarrow N_f$ **Beamforming a banda stretta**

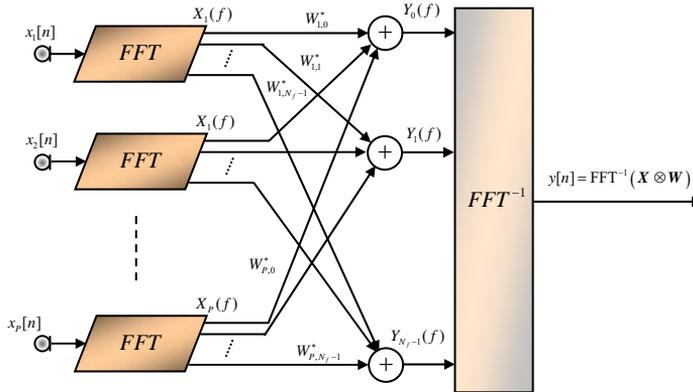


Figura 9.26 Beamformer nel dominio della frequenza (*frequency domain beamformer*).

Uscita calcolata come

$$y[n] = \text{FFT}^{-1}(\mathbf{W}^H \mathbf{X}).$$

Una seconda modalità di decomposizione, consiste nella suddivisione in sottobande spaziali e temporali. La suddivisione in sottobande spaziali è effettuata con una opportuna distribuzione della schiera come, per esempio, gli array a innesto armonico descritta in (Cfr. §9.2.3.4), quella temporale con un banco filtri come descritto nel Cap.7.6).

Le sottobande sono determinate da una selezione di un sottoinsieme di sensori. Ogni *insieme di sensori di sottobanda* è considerato come un BF che può essere implementato nel dominio del tempo o della frequenza. Ogni sottobanda consente di elaborare un segnale a banda più stretta rispetto a quella del segnale d'ingresso $s[n]$ e, nel caso di elevato numero di sottobande spaziali, il processamento di sottobanda può essere eseguito con un semplice *delay&sum*.

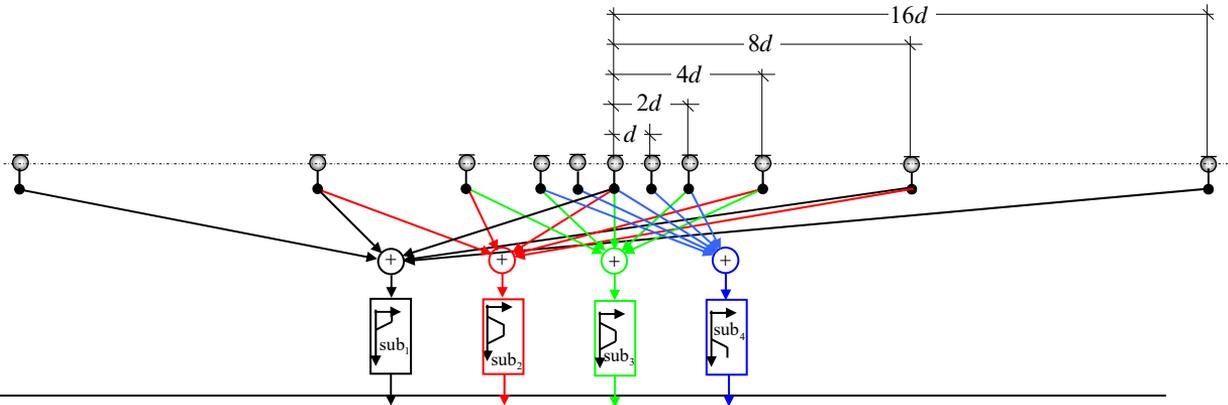


Figura 9.27 Esempio di beamformer a 11 microfoni, con struttura nested a 4 sotto-bande mediante sub-array di tipo *delay & sum*. Per ogni sottobanda sono selezionati 5 microfoni.

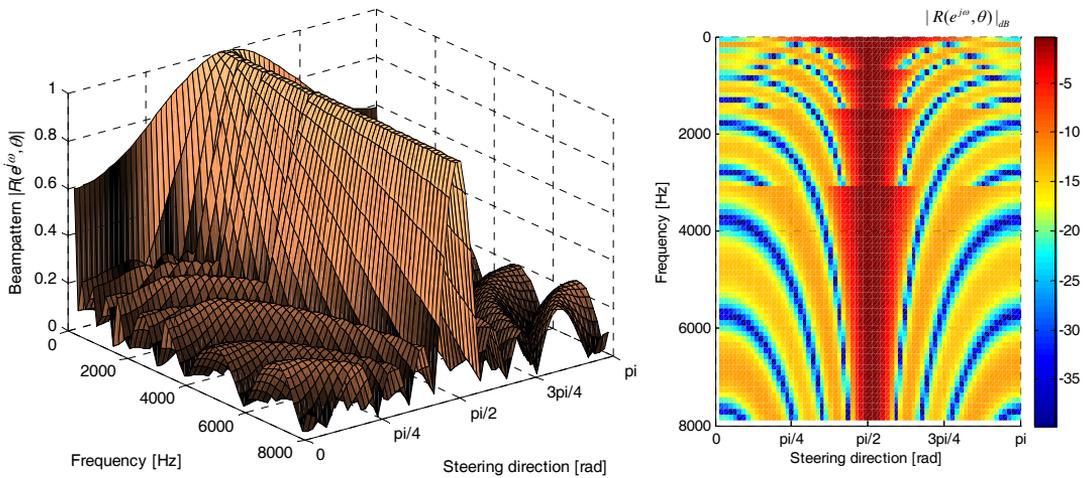


Figura 9.28 Diagramma di radiazione, in valori naturali per un BF con struttura nested di Figura 9.27 con $d = 3.5\text{cm}$ e $f_c = 16\text{kHz}$ con $sub_1 = (0, 800]$, $sub_2 = (800, 1600]$, $sub_3 = (1600, 3200]$ e $sub_4 = (3200, 8000]$ [Hz].

In Figura 9.27 è riportata, a titolo di esempio, una struttura nested con **11 microfoni a quattro sottobande**. In Figura 9.28 è riportato il beampattern in dB dell'array di Figura 9.27 per una distanza tra i sensori pari a $d = 3.5\text{cm}$ e $f_c = 16\text{kHz}$.

9.4.4 Sintesi diretta delle risposta spaziale con metodi approssimati

Il progetto del BF consiste nella determinazione dei pesi w in modo tale che la risposta $R(e^{j\omega}, \theta)$ meglio approssimi una certa risposta desiderata indicata come $R_d(e^{j\omega}, \theta)$.

In generale, per i filtri numerici i metodi di progetto più comuni sono:

- 1) **Finestratura o windowing** - Visto in precedenza, tale metodo consiste nella moltiplicazione della risposta impulsiva ideale di lunghezza infinita per una funzione peso di forma opportuna, detta finestra, in grado di mitigare il ripple (fenomeno di Gibbs) dovuto al troncamento.
- 2) **Campionamento delle risposta in frequenza e angolare** - Il metodo consiste nella minimizzazione di una funzione di distanza $d\{R(e^{j\omega}, \theta), R_d(e^{j\omega}, \theta)\}$, con un certo criterio, per un certo numero di direzioni (angoli θ) e frequenze.
- 3) **Approssimazione polinomiale con criterio minmax** - Algoritmo di Remez.

Nel beamforming il metodo 3), basato sul teorema dell'alternanza (relativo alle tecniche di approssimazione polinomiale), è applicabile solo nel caso di array lineare a distribuzione uniforme.

9.4.4.1 Metodo della finestratura

L'analogia dall'array a banda stretta con il filtraggio numerico FIR espresso dalla (9.85), implica anche metodologie comuni di progetto. Nel caso di pesi unitari l'array si comporta come un filtro FIR in media mobile (Cfr. §1.1.4.3) per cui aumentando la lunghezza del filtro (in questo caso il numero di sensori) diminuisce la larghezza del lobo ma non il livello dei lobi secondari (vedi Cap. 1, Figura 1.21). Per diminuire il livello dei lobi secondari occorre determinare opportuni schemi di pesatura simili a quelli del metodo delle finestre per il progetto di filtri FIR a fase lineare.

La scelta della finestra consente di determinare il livello accettabile dei lobi secondari mentre il numero di sensori determina la larghezza del beampattern, ovvero la risoluzione spaziale del array.

Una scelta molto comune effettuata nell'array di antenne, come in precedenza indicato, è la finestra di Dolph-Chebyshev che ha la proprietà di avere i lobi secondari tutti allo stesso livello (caratteristica quasi equiripple) e una banda spaziale piuttosto stretta.

Detti $W(m)$, $m \in [-P+1, P-1]$, i campioni della DFT dei pesi w_m^* , la finestra Dolph-Chebyshev è calcolabile come (vedi per dettagli [30])

$$W(m) = (-1)^m \frac{\cos \left[P \cos^{-1} \left[\beta \cos \left(\pi \frac{m}{P} \right) \right] \right]}{\cosh \left[P \cosh^{-1}(\beta) \right]}; \quad 0 \leq |m| \leq P-1 \quad (9.91)$$

in cui il termine β è definito dalla

$$\beta = \cosh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1}(10^\alpha) \right] \quad (9.92)$$

e

$$\cos^{-1}(X) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left[X/\sqrt{1.0 - X^2}\right], & |X| < 1.0 \\ \ln\left[X + \sqrt{X^2 - 1.0}\right], & |X| \geq 1.0 \end{cases} \quad (9.93)$$

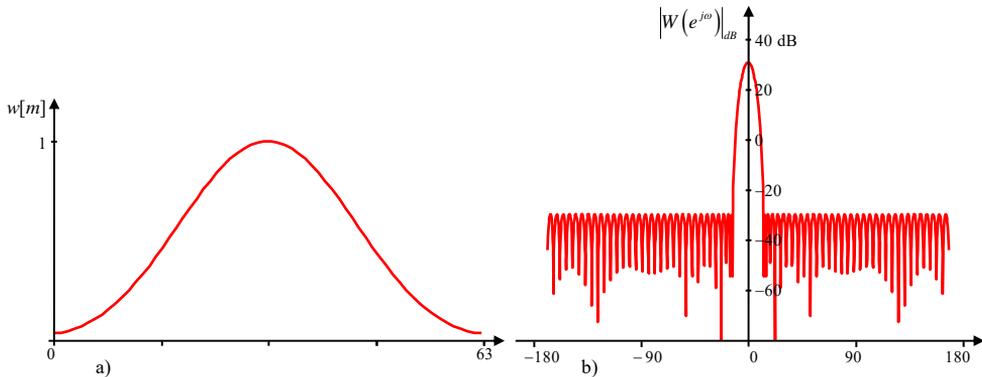


Figura 9.29 Finestra di Dolph-Chebyshev con $20 \log_{10}(10^\alpha) = 60 \text{ dB}$: a) dominio del tempo; b) risposta in frequenza.

Il parametro α è proporzionale all'attenuazione in dB desiderata dei lobi secondari che è pari a $20 \log_{10}(10^\alpha)$. Per ottenere i pesi w_m^* è sufficiente compiere la DFT inversa dei campioni $W(m)$.

In Figura 9.29, è riportato l'andamento dei pesi e della risposta in frequenza spaziale di un array a $P = 64$ elementi con pesi $w[m]$ calcolati con la finestra di Dolph-Chebyshev. Altri tipi di finestre sono illustrate in [30].

9.4.4.2 Sintesi della risposta spaziale con campionamento delle risposta in frequenza e angolare

Il metodo del campionamento della risposta in frequenza e angolare coincide con l'analogo metodo del campionamento in frequenza dei filtri numerici. In pratica si minimizza la distanza ai minimi quadrati in un numero finito di punti angolari $q \in [0, Q-1]$ e in frequenza $k \in [0, K-1]$, tra la risposta desiderata $R_d(e^{j\omega_k}, \theta_q)$ e quella effettiva del BF $R(e^{j\omega_k}, \theta_q)$. La funzione costo deterministica è scritta come

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{k=0}^{K-1} \left| R(e^{j\omega_k}, \theta_q) - R_d(e^{j\omega_k}, \theta_q) \right|^2 \quad (9.94)$$

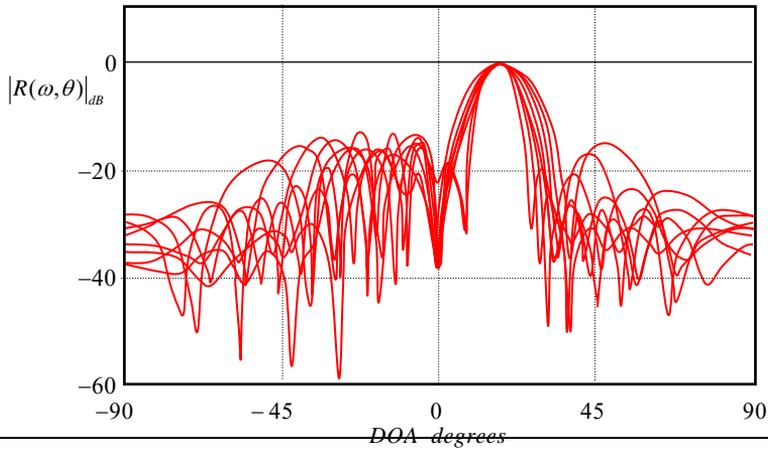


Figura 9.30 Risposta di un *data independent beamformer* lineare: con $P = 16$, $M = 5$, distanza tra i sensori $d = \lambda/2|_{\omega=4\pi/5}$; valutato per otto frequenze nell'intervallo (normalizzato) $2\pi/5$ e $4\pi/5$. La risposta desiderata è pari a: guadagno unitario e fase lineare per $\omega \in [2\pi/5, 4\pi/5]$ per un angolo $\theta = 18^\circ$ (zero altrove) (figura tratta da [17]).

Posto per semplicità, $J = K \equiv Q$, la (9.94) è riscritta come

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{J-1} |R_d(e^{j\omega_j}, \theta_j) - R(e^{j\omega_j}, \theta_j)|^2. \quad (9.95)$$

Per una formulazione matriciale, si definisce il vettore \mathbf{r}_d contenente le funzioni di radiazione desiderate $R_d(\omega_j, \theta_j)$ nei J punti di campionamento: per cui

$$\mathbf{r}_d \in \mathbb{C}^{J \times 1} \triangleq [R_d(\omega_0, \theta_0) \quad R_d(\omega_1, \theta_1) \quad \cdots \quad R_d(\omega_{J-1}, \theta_{J-1})]^T \quad (9.96)$$

e analogamente \mathbf{r} il vettore delle risposte dell'array nei punti di campionamento

$$\mathbf{r} \in \mathbb{C}^{J \times 1} \triangleq [R(\omega_0, \theta_0) \quad R(\omega_1, \theta_1) \quad \cdots \quad R(\omega_{J-1}, \theta_{J-1})]^T. \quad (9.97)$$

Si definisce \mathbf{A}_s ($PM \times J$), la steering matrix contenente gli steering vectors nei punti di campionamento della risposta tale che $\mathbf{r} = \mathbf{A}_s^H \mathbf{w}$, come

$$\mathbf{A}_s \in \mathbb{C}^{PM \times J} [\mathbf{a}(\omega_0, \theta_0) \quad \mathbf{a}(\omega_1, \theta_1) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\omega_{J-1}, \theta_{J-1})]_{\times J}. \quad (9.98)$$

Per la (9.95), e per le precedenti posizioni, il problema LS (9.95) può essere formulato in modo canonico con *equazioni normali*, del tipo

$$\mathbf{w}_{opt} \therefore \min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{r}_d - \mathbf{A}_s^H \mathbf{w}\|^2 \quad (9.99)$$

per cui minimizzando rispetto al vettore dei parametri \mathbf{w} , si ottiene un sistema lineare di PM equazioni con soluzione ottima del tipo

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{A}_s^\# \mathbf{r}_d \quad (9.100)$$

dove $\mathbf{A}_s^\# = (\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s^H)^{-1} \mathbf{A}_s$ è la pseudoinversa di Moore-Penrose.

In Figura 9.30 è riportato il beampattern di un ULA a banda larga, con sedici sensori ($P = 16$) e filtri FIR a cinque tappi ($M = 5$), con coefficienti valutati con la (9.99). La risposta desiderata ha guadagno unitario e fase lineare per $\omega \in [2\pi/5, 4\pi/5]$ e per un angolo pari a $\theta = 18^\circ$ (zero altrove).

Osservazione

A differenza del caso del filtraggio adattativo, dove le equazioni normali hanno una valenza legata alla statistica del secondo ordine del segnale d'ingresso, in questo caso la matrice $\mathbf{A}^\#$ è di tipo interamente deterministico poiché specifica la risposta desiderata del beamforming.

Il metodo LS per il beamforming può essere facilmente esteso considerando dei particolari vincoli sulla risposta spazio-frequenza desiderata come, per esempio, risposta nulla (o zeri) in certe direzioni.

Osservazione

Nel caso in cui la dimensione effettiva dello spazio descritto dai vettori (*span*) $\mathbf{a}(\omega_j, \theta_j)$ per $j=0, 1, \dots, J-1$, è minore di PM la matrice \mathbf{A} risulta mal-condizionata. Tale situazione può accadere, per esempio, quando è campionata una sola direzione di arrivo e, in questo caso, si dimostra che lo spazio immagine di \mathbf{A} , $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ è dato approssimativamente dal TBWP per quella direzione.

Dalla (9.100) per \mathbf{A} mal-condizionata, la norma del vettore \mathbf{w} tende a diventare troppo elevata con conseguenti pessime prestazioni di guadagno di rumore bianco (9.74). In queste situazioni nel calcolo della (9.100) è conveniente usare un'approssimazione a rango ridotto di \mathbf{A} effettuata, per esempio, con decomposizione SVD. In questo modo è possibile non fare aumentare eccessivamente la norma di \mathbf{w} .

9.5 Beamforming statici statisticamente ottimi: *data dependent beamforming*

Data independent BF:

- o sintesi diretta della risposta spaziale dell'AP. Estensione dei metodi di progetto dei filtri FIR.

Data dependent BF :

- o adattamento rispetto alla statistica del rumore
- o adattamento rispetto alla statica del segnale utile.
- o adattamento rispetto entrambe statistiche.

PROBLEMA: calcolo del vettore dei pesi/filtri w ottimi secondo qualche criterio

Esempio: \max *guadagno d'array (array gain) o direttività* e

$$\begin{aligned}
 G(e^{j\omega}, \theta_0) &\triangleq \frac{SNR_{OUT}}{SNR_{IN}} \\
 &= \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta_0)|^2}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega}) \mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega}) \mathbf{W}}
 \end{aligned} \tag{9.101}$$

Due filosofie

1) Massimizzo direttamente un certo indice di qualità

$$\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \max_{\mathbf{W} \in \Omega} \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W}}$$

2) Massimizzo un certo indice di qualità soggetto a certi vincoli

$$\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \max_{\mathbf{W} \in \Omega} \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W}} \quad \text{s.a.v.} \quad f(\mathbf{W}^H \mathbf{a} - c), \text{ pi\`u eventuali altri vincoli}$$

Più tipologie di algoritmi (come nel filtraggio adattativo)

- Batch
- On-line
-

9.5.1 Beamformer a massimo SNR e superdirettivi

Detta $\hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega})$ la generica PSD normalizzata del campo di rumore (supposto nota o stimata), il vettore ottimo può essere **calcolato massimizzando il guadagno, definito rispetto al campo di rumore considerato**, con criterio

$$\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \max_{\mathbf{W} \in \Omega} \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W}} \quad (9.102)$$

Soluzione

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \mathbf{a}} \quad (9.103)$$

Dimostrazione

La soluzione della (9.102) può essere determinata con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange o, più semplicemente, **considerando il gradiente rispetto a \mathbf{W}^H ed eguagliandolo a zero**. Abbiamo allora

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{W}^H} \left(\frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W}} \right) = \frac{2\mathbf{W}\mathbf{a}}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W}} - \frac{2\hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W} |\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2}{(\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W})^2} = \mathbf{0} \quad (9.104)$$

ovvero, $\mathbf{W}\mathbf{a}(\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W}) = \hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W} |\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2$ che, per la (9.67), implica

$$\hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \mathbf{a} \mathbf{W} = \mathbf{W} \quad (9.105)$$

La precedente espressione equivale a un problema classico di autovettori. In questi casi, si dimostra che la soluzione ottima è l'*autovettore generalizzato* corrispondente al massimo *autovalore generalizzato* della matrice $\mathbf{a}\mathbf{a}^H$ e $\hat{\mathbf{R}}_m^{-1}$ [23] e risulta pari a

$$\mathbf{W}_{opt} = \alpha \cdot \hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \mathbf{a} \quad (9.106)$$

con la costante di proporzionalità α che dipende dal guadagno dell'array. Per esempio imponendo un guadagno unitario verso una certa *Look Direction* (LD) questo assume il valore $\alpha = 1/(\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \mathbf{a})$ per

cui la (9.106) diventa $\mathbf{W}_{opt} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{R}}_m^{-1} \mathbf{a}}$.

c.v.d.

Si osservi che nel caso di rumore isotropico sferico a distribuzione Gaussiana $\hat{\mathbf{R}}_m = \mathbf{I}$, il **beamformer ottimo risulta essere il DSBF convenzionale**

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{a}} = \frac{1}{P}. \quad (9.107)$$

9.5.1.1 Beamformer standard di Capon (presenza di vincoli)

Vincolo: **guadagno unitario lungo la LD** θ_0 .

Imponendo il vincolo di $\mathbf{W}^H \mathbf{a} = 1$ (guadagno unitario lungo la LD θ_0 .) la FC diventa

$$\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \min_{\mathbf{W} \in \Omega} (\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_{nn} \mathbf{W}) \quad \text{s.a.v.} \quad \mathbf{W}^H \mathbf{a} = 1 \quad (9.108)$$

(massimizzare la $\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \max_{\mathbf{W} \in \Omega} \frac{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_{nn} \mathbf{W}} = 1$ è equivalente alla minimo del denominatore)

La soluzione del problema di ottimizzazione (9.108) può essere eseguita applicando il metodo del moltiplicatore di Lagrange [19] (Cfr. §B.4.2). Per cui possiamo scrivere

$$L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_{nn} \mathbf{W} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{W}^H \mathbf{a} - 1) \quad (9.109)$$

dove con $L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda})$ si indica la funzione lagrangiana, il termine $\frac{1}{2}$ è inserito per le semplificazioni fatte in seguito, e $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{P \times 1}$ rappresenta il vettore dei moltiplicatori di Lagrange. Il gradiente rispetto a \mathbf{w} della (9.147) vale

$$\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) = \hat{\mathbf{R}}_{nn} \mathbf{W} + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (9.110)$$

Si osservi che il primo termine della precedente coincide proprio con il gradiente della funzione costo (9.108), mentre il secondo è un vettore normale al piano $(MP - P)$ -dimensionale dei vincoli definito dalla $\mathbf{W}^H \mathbf{a} - 1 = 0$. Per determinare l'ottimo tali vettori devono essere antiparalleli e ciò può essere ottenuto ponendo a zero il gradiente della lagrangiana: $\hat{\mathbf{R}}_{nn} \mathbf{W}^H + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\lambda} = 0$. Per cui l'ottimo vale

$$\mathbf{W}_{opt} = -\hat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (9.111)$$

Poiché \mathbf{W}_{opt} deve soddisfare anche il vincolo (9.142) il vettore dei moltiplicatori di Lagrange può essere calcolato come

$$\boldsymbol{\lambda} = -\left[\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1} \mathbf{a} \right]^{-1} \quad (9.112)$$

dove l'esistenza della matrice $\left[\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1} \mathbf{a} \right]^{-1}$ è garantita dal fatto che $\hat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1}$ è definita positiva e \mathbf{a} è un vettore non nullo.

Infine, combinando le (9.111) e (9.112), la soluzione dell'LS vincolato assume la forma

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{R}}_{nn}^{-1} \mathbf{a}}$$

che coincide proprio con la (9.103).

9.5.1.2 Soluzioni generali regolarizzate di Cox con vincoli di robustezza

Un'altra possibilità per migliorare l'espressione (9.108), consiste nel definire una FC in cui è massimizzato il guadagno $G(e^{j\omega})$ imponendo un certo guadagno di rumore bianco $GW(e^{j\omega})$ minore del massimo possibile. Formalmente, la FC diventa

$$\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \max_{\mathbf{W} \in \Omega} G(e^{j\omega}) \quad \text{s.a.v.} \quad GW(e^{j\omega}) = \beta^2 \leq P. \quad (9.113)$$

Equivalentemente, per avere più flessibilità di progetto e ottenere una soluzione regolarizzata, come proposto in [23] e [24] al posto della (9.113) è possibile minimizzare l'espressione

$$\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \min_{\mathbf{W} \in \Omega} \left(\frac{1}{G(e^{j\omega})} + \delta \frac{1}{GW(e^{j\omega})} \right)$$

dove δ è interpretato come moltiplicatore di Lagrange. Sostituendo le espressioni dei guadagni (9.67) e (9.74) si arriva alla definizione della FC

$$\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \min_{\mathbf{W} \in \Omega} \left(\frac{\mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}}_m \mathbf{W}}{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2} + \delta \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2} \right) = \arg \min_{\mathbf{W} \in \Omega} \left(\frac{\mathbf{W}^H (\hat{\mathbf{R}}_m + \delta \mathbf{I}) \mathbf{W}}{|\mathbf{W}^H \mathbf{a}|^2} \right). \quad (9.114)$$

La soluzione della precedente è simile alla (9.106) in cui alla matrice $\hat{\mathbf{R}}_m$ è stata sostituita la sua forma regolarizzata $\hat{\mathbf{R}}_m \rightarrow (\hat{\mathbf{R}}_m + \delta \mathbf{I})$. Risulta quindi

$$\mathbf{W}_{opt} = \alpha \cdot (\hat{\mathbf{R}}_m + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a} \quad (9.115)$$

ovvero, imponendo il guadagno unitario lungo la *look-direction*, vale

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{(\hat{\mathbf{R}}_m + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H (\hat{\mathbf{R}}_m + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}}. \quad (9.116)$$

Modulando i termini di regolarizzazione δ è possibile ottenere soluzioni ottime in funzione della tipologia del campo di rumore. Per esempio, per $\delta \rightarrow \infty$ il beamformer si riconduce a DSBF convenzionale.

Osservazione

La possibilità di avere le caratteristiche del rumore o del segnale è limitata a poche applicazioni tipiche. Per esempio nei radar, nei sonar attivi, dove la caratteristica del segnale trasmesso è nota a priori, o nella sismica in cui il rumore può essere stimato prima dell'arrivo dell'onda: solo in queste, e poche altre situazioni, è possibile stimare la caratteristica del solo rumore/segnale in assenza del segnale/rumore.

Più verosimilmente, nei casi passivi è possibile conoscere o stimare la PSD dell'intero segnale ricevuto dai sensori $\mathbf{R}_{xx}(e^{j\omega})$ che, per definizione, contiene anche la componente di rumore. In questo, caso nella (9.108), e quindi nella (9.116), è sufficiente sostituire la $\hat{\mathbf{R}}_m(e^{j\omega}) \rightarrow \mathbf{R}_{xx}(e^{j\omega})$.

Si osservi, inoltre, che nella massimizzazione del guadagno dell'array, considerando anche vincoli di uguaglianza relativi al guadagno di rumore bianco, sono considerate le seguenti tre forme quadratiche

$$|W^H \mathbf{a}|^2, \quad W^H \mathbf{R}_{nn} W \quad \text{e} \quad W^H W. \quad (9.117)$$

Poiché nella potenza di uscita, nel guadagno dell'array, nel guadagno di rumore bianco e nel rapporto generalizzato di superguadagno, sono considerate solo due delle forme quadratiche (9.117) possiamo considerare alcune forme equivalenti del problema di ottimizzazione. Seguendo tale filosofia in Cox in [23]-[24]

Il problema dell'array vincolato ottimo è formalizzato nelle seguenti modalità.

Problema A

Massimizzazione del guadagno di array (9.102), con vincolo sul guadagno di rumore bianco e vincolo di guadagno unitario:

$$W_{opt} \therefore \arg \max_{W \in \Omega} \frac{|W^H \mathbf{a}|^2}{W^H \mathbf{R}_{nn} W} \quad \text{s.a.v.} \quad \frac{|W^H \mathbf{a}|^2}{W^H W} = \delta^2, \quad W^H \mathbf{a} = 1. \quad (9.118)$$

Problema B

Massimizzazione del guadagno di array (9.102), con vincolo sulla norma di W e vincolo di guadagno unitario:

$$W_{opt} \therefore \arg \max_{W \in \Omega} \frac{|W^H \mathbf{a}|^2}{W^H \mathbf{R}_{nn} W} \quad \text{s.a.v.} \quad W^H W = \delta^{-2}, \quad W^H \mathbf{a} = 1. \quad (9.119)$$

Problema C

Minimizzazione della potenza di uscita con vincolo sul guadagno di rumore bianco e vincolo di guadagno unitario:

$$W_{opt} \therefore \arg \min_{W \in \Omega} W^H \mathbf{R}_{xx} W \quad \text{s.a.v.} \quad \frac{|W^H \mathbf{a}|^2}{W^H W} = \delta^2, \quad W^H \mathbf{a} = 1. \quad (9.120)$$

Problema D

Minimizzazione della potenza di uscita con vincolo sulla norma di W e vincolo di guadagno unitario:

$$W_{opt} \therefore \arg \min_{W \in \Omega} W^H \mathbf{R}_{xx} W \quad \text{s.a.v.} \quad W^H W = \delta^{-2}, \quad W^H \mathbf{a} = 1. \quad (9.121)$$

Per quanto detto una soluzione generale dei problemi A-D può essere formulata considerando una soluzione del (9.116) in cui si può considerare, al posto del solo rumore, tutto il segnale, ovvero $\hat{\mathbf{R}}_{nn}(e^{j\omega}) \rightarrow \mathbf{R}_{xx}(e^{j\omega})$.

In altri termini, è attenuato solo il segnale non proveniente dalla direzione θ_0 che prevalentemente dovrebbe contenere il rumore. La soluzione risulta allora

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{(\mathbf{R}_{xx} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H (\mathbf{R}_{xx} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}}. \quad (9.122)$$

come nella (9.108).

Si osservi, infine, che in presenza di vincoli multipli la formalizzazione del problema risulta essere del tipo

$$\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \min_{\mathbf{W} \in \Omega} \mathbf{W}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} \quad \text{s.a.v.} \quad \mathbf{C}^H \mathbf{W} = \mathbf{F}. \quad (9.123)$$

in cui \mathbf{C} rappresenta un *opportuna* matrice di vincolo e \mathbf{F} il guadagno (in genere $\mathbf{F} = 1$). In questo caso la soluzione, calcolabile con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ha la forma

$$\mathbf{W}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{F}. \quad (9.124)$$

Tale soluzione, derivata da Cox e altri ([23]-[24]), coincide con il BF di Frost discussa, e dimostrata, nel §9.5.3.

A corollario di quanto sopra esposto, si osservi che il vettore dei pesi \mathbf{w} del BF può essere decomposto nelle due componenti ortogonali

$$\mathbf{W} = \mathbf{G} + \mathbf{V} \quad (9.125)$$

Definendo gli operatori di proiezione relativi alla matrice di vincolo \mathbf{C} come

$$\tilde{\mathbf{P}}_C = \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \quad \text{proiezione su } \mathcal{R}(\mathbf{C}) \quad (9.126)$$

$$\mathbf{P}_C = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}}_C \quad \text{proiezione su } \mathcal{N}(\mathbf{C}^H) \quad (9.127)$$

tali che

$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{P}}_C \mathbf{W} \quad (9.128)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}_C \mathbf{W} \quad (9.129)$$

Proiettando la soluzione ottima (9.124) nello spazio immagine di \mathbf{C} risulta

$$\mathbf{G} = \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{F} \quad (9.130)$$

che non dipende da \mathbf{R}_{xx}^{-1} .

Approfondimenti e soluzioni adattative della (9.124) e delle forme (9.128)-(9.129), sono presentati nei prossimi paragrafi.

9.5.1.3 Beamformer superdirettivo: *line-array*

I beamformer convenzionali per $d \approx \lambda/2$ hanno una direttività, nella direzione *broad-side*, approssimativamente pari al numero di sensori P . Nel caso di ULA per $d \rightarrow 0$, come per i microfoni differenziali, il guadagno di array è, dipendentemente dalle caratteristiche del campo di rumore, superiore a quello dei BF convenzionali. In particolare, in [15] si dimostra che per $d \ll \lambda/2$, nella direzione *end-fire*, l'array ha un indice di direttività asintoticamente tendente a P^2 , nel caso di campo diffuso a simmetria sferica, e $2P$ per quello a simmetria cilindrica. Come illustrato in Figura 9.31, tale relazione tende a essere esattamente verificata per $P = 2$ e $P = 3$.

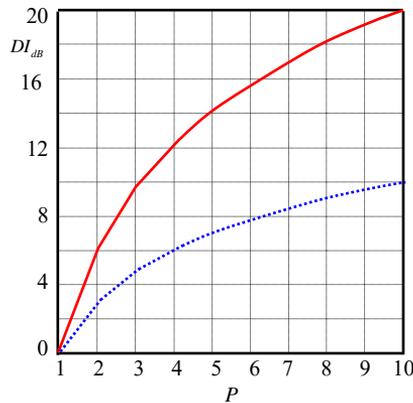


Figura 9.31 Indice di direttività per P microfoni omnidirezionali coincidenti. Caso di rumore isotropico sferico linea continua, e cilindrico linea tratteggiata [15].

Tale tipo di array, per $d \ll \lambda/2$, ovvero $d \rightarrow 0$, sono detti *beamformer superdirettivi* o *Super Directive BF* (SDBF) e nel caso di array *filter-and-sum* i pesi dei filtri possono essere ottimizzati con gli stessi criteri definiti nel precedente paragrafo. In particolare sono definiti array superdirettivi (o a superguadagno) o *SDBF*, i beamformer con:

- i) allineamento *end-fire*;
- ii) distanza tra i sensori $d \ll \frac{\lambda}{2}$ e $d \rightarrow 0$;
- iii) caratteristiche di rumore isotropico note;
- iv) pesi ottimi determinati con opportuni vincoli.

Per lo studio e la sintesi dei BF superdirettivi consideriamo la soluzione regolarizzata con vincoli di robustezza, espressioni (9.113)-(9.116), quando il rumore è di tipo diffuso, a simmetria sferica o cilindrica. La soluzione ottima, per $\hat{\mathbf{R}}_m \rightarrow \mathbf{\Gamma}_m^{diffuse}$, risulta

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{(\mathbf{\Gamma}_m^{diffuse} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H (\mathbf{\Gamma}_m^{diffuse} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}} \quad (9.131)$$

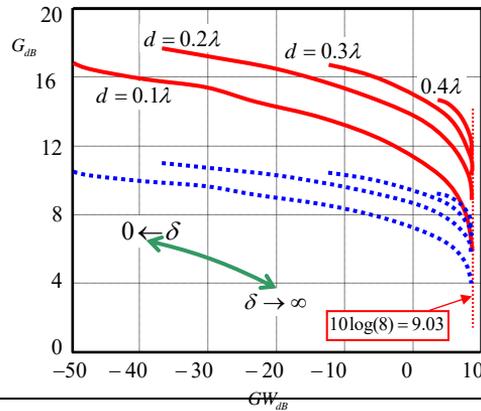


Figura 9.32 Andamento del guadagno di un *line-array end-fire* in funzione del guadagno di rumore bianco per δ parametrico nel caso di rumore isotropico sferico, linea continua, e cilindrico linea tratteggiata. Array ULA $P = 8$, $\theta = \theta_{endfire}$, per d indicate in figura [24].

Il legame tra il parametro di regolarizzazione δ e il vincolo sul guadagno di rumore bianco β^2 (vedi eqn. (9.113)) è piuttosto complesso e dipende dalla natura del rumore. In generale, però, per $\delta \rightarrow 0$, nella (9.131), prevale la statistica del rumore e si ottiene un BF con una buona direttività e scarso guadagno di rumore bianco; al contrario per $\delta \rightarrow \infty$, prevale la matrice diagonale e si ottiene il DSBF convenzionale caratterizzato da un guadagno di rumore bianco ottimo $GW(e^{j\omega}) \sim P$.

In Figura 9.32 sono riportate, a titolo di esempio, le curve con il legame tra G e GW al variare del parametro di regolarizzazione ($0 \leq \delta < \infty$), per un ULA con $P = 8$ con sensori spazati tra $d = 0.1\lambda$ e $d = 0.4\lambda$, per rumore isotropico a simmetria sferica e cilindrica. Dalla figura si può osservare che per $\delta \rightarrow \infty$ il guadagno tende a diventare quello del BF convenzionale mentre per $\delta \rightarrow 0$ per d piccolo tende a superare tale valore e diventare proporzionale a $2P$ o a P^2 rispettivamente per rumore a simmetria cilindrica e sferica. Per cui, per $d \rightarrow 0$ e pesi calcolati con $\delta \rightarrow 0$, il line-array è detto a *superguadagno*.

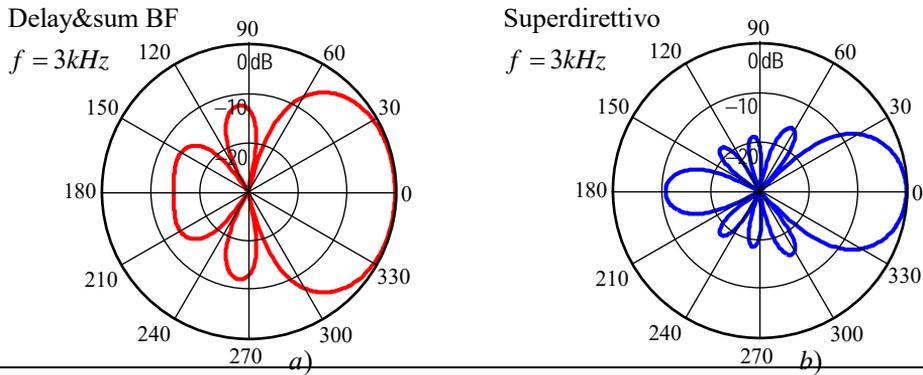


Figura 9.33 Diagrammi di radiazione a 3kHz, per array con $P = 5$ microfoni, $d = 3\text{cm}$, $f_c = 16\text{ kHz}$: a) *delay & sum BF*, b) *filter&sum BF* con progetto ottimo [38].

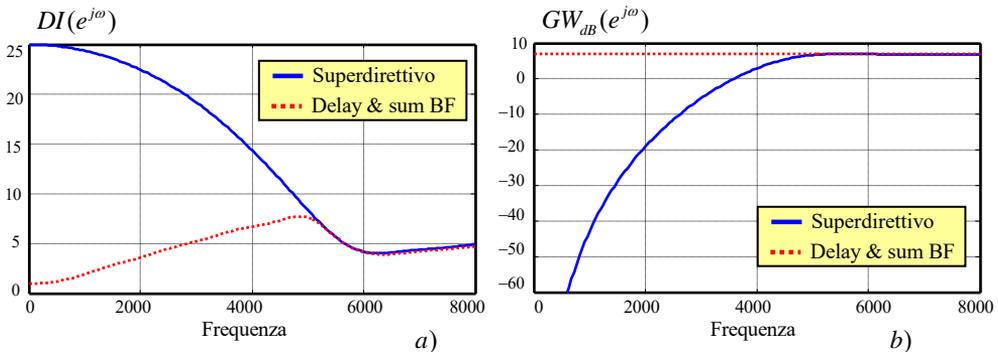


Figura 9.34 Andamenti dell'indice di direttività DI , in valori naturali, e del guadagno di rumore bianco GW_{dB} , per gli array con diagrammi di radiazione di Figura 9.33.

In Figura 9.33 è riportato il confronto dei diagrammi di radiazione di un ULA convenzionale e un BF superdirettivo con pesi determinati con la (9.131), mentre in Figura 9.34 è riportato il confronto dell'indice di direttività e del guadagno di rumore bianco per gli stessi BF.

In Figura 9.35, tratta da [12], è riportato l'andamento dell'indice di direttività, e del guadagno di rumore bianco per un array con $P = 3$ microfoni omnidirettivi. I pesi del BF sono stati determinati con la FC (9.113) con vincoli $\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\omega, \theta_0) = 1$ e $\mathbf{W}^H \mathbf{W} \leq \beta$ con soluzione (9.131).

Si osservi che, per $\delta = 0$ il beamformer tende a essere superdirettivo con DI tendente al valore massimo ($10\log_{10}(P^2) = 9.54\text{ dB}$) ma con basso GW soprattutto alle basse frequenze. Al contrario per

$\delta = 10$ il beamformer tende a essere un DSBF con $GW = 10\log_{10}(P) = 4.77$ dB) ma con bassa direttività .

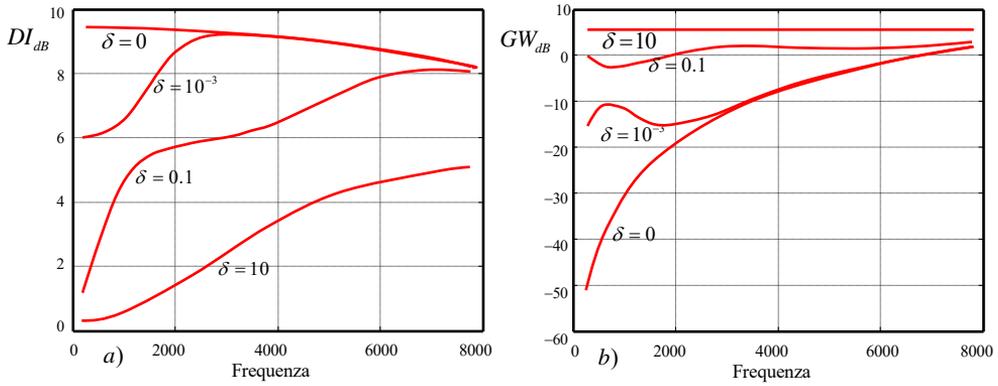


Figura 9.35 Andamenti dell'indice di direttività DI_{dB} , e del guadagno di rumore bianco GW_{dB} , per un array microfonico superdirettivo, per differenti valori di δ . $P = 3$, posizione $[0 \ 0.01 \ 0.025]$ m, $f_c = 16$ kHz, $\theta_{endfire}$.

Osservazione

Nel caso di cluster di diffusori acustici i beamformer superdirettivi sono spesso appellati semplicemente come *line-array*.

9.5.2 Post-filtering beamformer

Ipotesi: **campo diffuso** (ambienti riverberanti),

L'utilizzo del **post-filter** insieme a un beamformer convenzionale consente di aggiungere al filtro operante nel dominio spaziale un cancellatore di rumore operante nel dominio della frequenza.

Il modello del segnale per l'adattamento del post-filter è quello derivato dalla di seguito riscritto

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}(\omega, \theta)s[n] + \mathbf{n}[n] \quad (9.132)$$

con $\mathbf{n}[n]$ rumore bianco spazialmente incorrelato e indipendente dal segnale. La funzione costo per la minimizzazione del SNR nel senso di minimi quadrati risulta essere

$$J(\mathbf{w}) \triangleq E\{(y[n] - s[n])^2\}. \quad (9.133)$$

Il vettore \mathbf{w} ottimo (**filtro ottimo di Wiener**) è calcolato come

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{\mathbf{R}_{ss}(e^{j\omega})}{\mathbf{R}_{xx}(e^{j\omega})} = \frac{\mathbf{R}_{ss}(e^{j\omega})}{\mathbf{R}_{ss}(e^{j\omega}) + \mathbf{R}_{nn}(e^{j\omega})}. \quad (9.134)$$

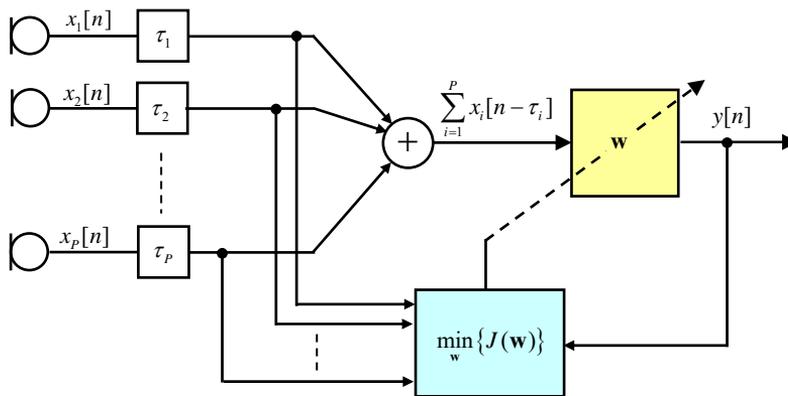


Figura 9.36 Post-filtering beamforming.

Per la stima degli spettri $\mathbf{R}_{ss}(e^{j\omega})$, $\mathbf{R}_{nn}(e^{j\omega})$ osserviamo che la cross correlazione, non considerando lo steering, può essere scritta come

$$\begin{aligned} E\{x_i[n]x_j[n+m]\} &= E\{(s[n] + n_i[n]) + (s[n+m] + n_j[n+m])\} \\ &= E\{s[n]s[n+m]\} + E\{s[n]n_j[n+m]\} \\ &\quad + E\{n_i[n]s[n+m]\} + E\{n_i[n]n_j[n+m]\} \end{aligned} \quad (9.135)$$

dove gli ultimi tre termini della precedente, se il rumore è non correlato, sono nulli per cui dalla (9.135) è possibile stimare la PSD del segnale. Per $i \neq j$ vale infatti

$$\mathbf{R}_{ss}(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\left(E\{x_i[n]x_j[n+m]\}\right) \approx \text{DTFT}\left(E\{s[n]s[n+m]\}\right) \quad i \neq j \quad (9.136)$$

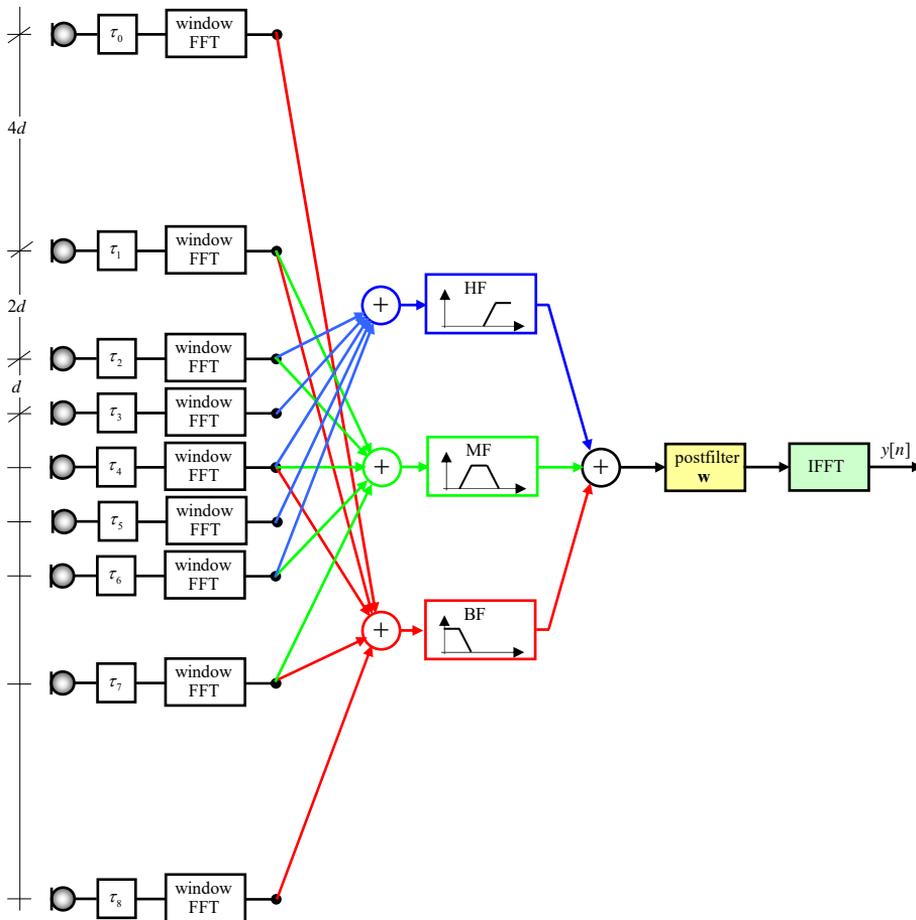


Figura 9.37 Esempio di *microphones subarray beamforming* a innesto armonico con $d = 5\text{cm}$ [34].

La formula di adattamento risulta

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{\text{DTFT}\left(E\{[x_i[n]x_j[n+m]]\}\right)}{\text{DTFT}\left(E\{[x_i[n]x_j[n+m]]\}\right)} \quad i \neq j \quad (9.137)$$

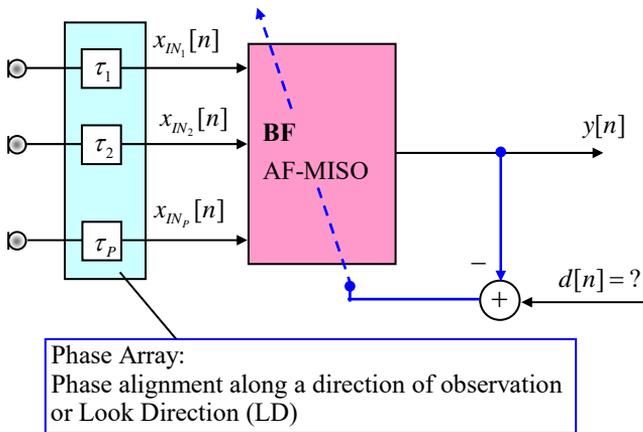
Due esigenze contrastanti

1. Per garantire la non correlazione spaziale del rumore, ovvero una funzione di coerenza nulla ($\gamma(\mathbf{r}_{i,j}, \omega) \approx 0$), occorre **distanziare sufficientemente i microfoni tra loro**.
2. Un'elevata distanza tra i microfoni produce, però, una più **scarsa direttività** (lobi più grandi), una minore larghezza di banda e cattive prestazioni nel caso sia presente anche rumore coerente.

In letteratura sono presenti **numerose varianti del post-filtering beamformer** come, per esempio in [21], in cui l'autore propone l'utilizzo di sub-array con innesto armonico.

9.5.3 Beamformer a larga banda a minima varianza: algoritmo di Frost

PREVALENTEMENTE NON ADATTATIVO



Problema: definizione delle FX

Algoritmo di Frost

Nella letteratura sull'AP l'algoritmo descritto è indicato come:

Linearly Constrained Minimum Variance (LCMV) broad-band beamforming.

Per una certa **risposta spaziale desiderata** verso la **Look Direction (LD)**, si **minimizza la potenza di rumore proveniente da tutte le altre direzioni,**

Uscita del BF (combinazione lineare di tutti i filtri) $\mathbf{w}, \mathbf{x} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{(P(M) \times 1)}$

$$y[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{w} \quad (9.138)$$

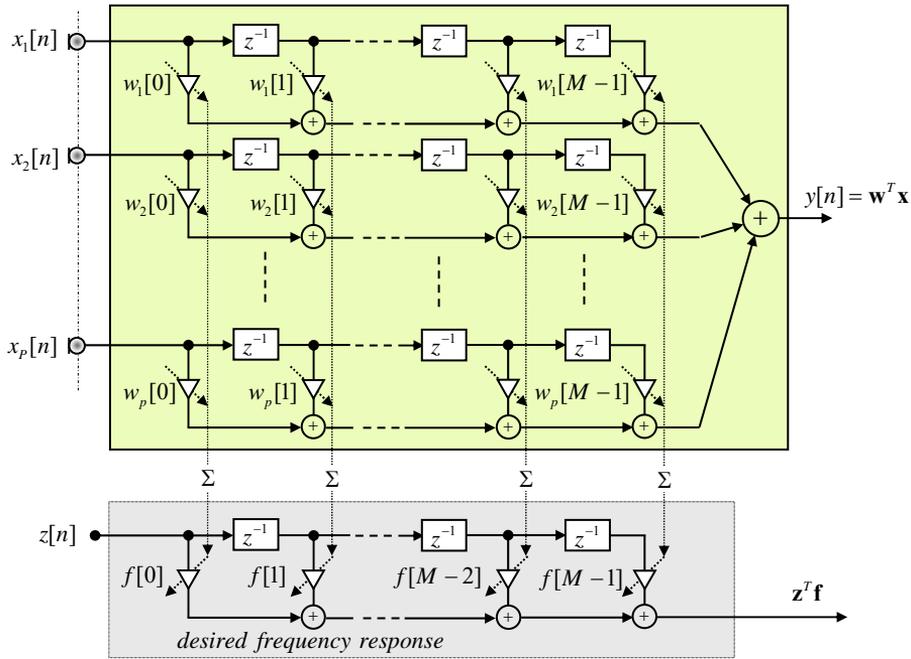


Figura 9.38 LCMV (*Linearly Constrained Minimum Variance*) beamformer a banda larga e processo equivalente imposto come vincolo.

Definiamo la funzione errore $e[n]$ come

$$e[n] = d_\theta[n] - y[n] = d_\theta[n] - \mathbf{w}^H \mathbf{x} \quad (9.139)$$

In generale avremo

$$d_\theta[n] = \begin{cases} 0 & \text{per } \theta \neq \text{LD} \\ \max & \text{per } \theta = \text{LD}. \end{cases} \quad (9.140)$$

Minimizzando $E\{|e[n]|^2\}$ con criterio LS, per $d_{\theta \neq \text{LD}}[n] = 0$, otteniamo una FC

$$J(\mathbf{w}) = E\{|e[n]|^2\} = E\{|y[n]|^2\} = \mathbf{w}^H E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{w} \quad (9.141)$$

forma quadratica con ottimo $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Per evitare la soluzione banale si impone il vincolo lineare

$$\mathbf{w}_{opt} \therefore \arg \min_{\mathbf{w}} \{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}\} \quad \text{s.a.v.} \quad \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (9.142)$$

con il vincolo lineare, espresso dai pesi del filtro (virtuale) \mathbf{f} , è dovuto alla risposta in frequenza del beamforming lungo la LD.

Si osservi che la (9.142) è simile, e più generale, della (9.108) per $\hat{\mathbf{R}}_{mm}(e^{j\omega}) \rightarrow \mathbf{R}_{xx}(e^{j\omega})$.

9.5.3.1 Determinazione della matrice di vincolo

valutiamo la matrice \mathbf{C}^H per un array con tre sensori ($P = 3$) e quattro ritardi ($M = 4$), in accordo con la esplicitamente il vincolo. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} w_1[0] + w_2[0] + w_3[0] &= f[0] & 1^\circ \text{ snap-shot} \\ w_1[1] + w_2[1] + w_3[1] &= f[1] & 2^\circ \text{ snap-shot} \\ w_1[2] + w_2[2] + w_3[2] &= f[2] & 3^\circ \text{ snap-shot} \\ w_1[3] + w_2[3] + w_3[3] &= f[3] & 4^\circ \text{ snap-shot.} \end{aligned} \quad (9.143)$$

Dalla definizione (9.33) del vettore composto di pesi $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P(M) \times 1}$ la precedente può essere espressa in termini matriciali $\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$ come

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1[0] \\ w_1[1] \\ w_1[2] \\ w_1[3] \\ w_2[0] \\ w_2[1] \\ w_2[2] \\ w_2[3] \\ w_3[0] \\ w_3[1] \\ w_3[2] \\ w_3[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix}. \quad (9.144)$$

Con semplice ispezione visiva, osserviamo che \mathbf{C} è una *matrice circolante* sparsa e costruita con P blocchi di matrici unitarie $\mathbf{I}_{M \times M}$; risulta allora

$$\mathbf{C}^H \in \mathbb{R}^{M \times M(P)} = [\mathbf{I}_{M \times M} \quad \mathbf{I}_{M \times M} \quad \cdots \quad \mathbf{I}_{M \times M}]_{1 \times P}. \quad (9.145)$$

inoltre, con tale scelta vale $\mathbf{C}^H \mathbf{C} = \mathbf{M} \mathbf{I}$.

Per minimizzare la potenza di rumore, come discusso nel beamforming superdirettivo è più opportuno riferirsi alla generica matrice di covarianza del rumore \mathbf{Q}_{nn} per cui la funzione da minimizzare risulta $\mathbf{w}^H \mathbf{Q}_{nn} \mathbf{w}$.

L'appellativo *Linearly Constrained Minimum Variance* è più propriamente riferito a questo secondo caso. È uso comune, comunque, usare il termine LCMV per entrambe le situazioni descritte.

Soluzione

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{(\mathbf{R}_{xx} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}}{\mathbf{C}^H (\mathbf{R}_{xx} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}} \mathbf{f}. \quad (9.146)$$

Dimostrazione

Metodo del moltiplicatore di Lagrange la FC aumentata diventa

$$L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{C}^H \mathbf{w} - \mathbf{f}). \quad (9.147)$$

La precedente, in modalità robusta, può essere scritta come

Il parametro $0 \leq \delta < \infty$ rappresenta il **termine di regolarizzazione modulando il quale è possibile ottenere soluzioni ottime in funzione della tipologia del campo di rumore.**

Osservazione

L'uscita del filtro ottimo coincide con la *stima a massima verosimiglianza di un processo stazionario immerso in rumore Gaussiano.*

Per tale motivo, a volte, tale metodo è definito come *Maximum Likelihood Distortionless Estimator (MLDE)* o *Least Squares Unbiased Estimator (LSUB).*

9.5.3.2 Soluzione ricorsiva LMS: gradiente stocastico vincolato

- Il metodo di Frost, non è di tipo ricorsivo.
- La minimizzazione della $L(\mathbf{w})$ può essere eseguita con l'approccio generale della discesa del gradiente, detto che ha la forma

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu \nabla L(\mathbf{w}_n) = \mathbf{w}_n - \mu [\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_n + \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}_n] \quad (9.148)$$

con il vincolo sui pesi \mathbf{w}_{n+1} espresso come

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}^H \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{C}^H \mathbf{w}_n - \mu \mathbf{C}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_n - \mu \mathbf{C}^H \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}_n. \quad (9.149)$$

Risolviendo rispetto ai moltiplicatori di Lagrange e sostituendo nella (9.148) si ottiene

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu [\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H] \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_n - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} [\mathbf{f} - \mathbf{C}^H \mathbf{w}_n] \quad (9.150)$$

dove \mathbf{I} ($PM \times PM$), è la matrice unitaria e μ il *passo di adattamento* o *learning rate*.

Considerando gli operatori di proiezione (9.126) e (9.127) e definendo il *vettore quiescente* e l'*operatore di proiezione* su $\mathcal{N}(\mathbf{C}^H)$ rispettivamente, come

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\triangleq \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} & \dim(PM \times 1) \\ \mathbf{P}_C &\triangleq [\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H] & \dim(PM \times PM) \end{aligned} \quad (9.151)$$

l'algoritmo (9.150) può essere scritto in modo più compatto come

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{P}_C [\mathbf{w}_n - \mu \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_n] + \mathbf{F}. \quad (9.152)$$

In pratica stimando la matrice di correlazione come semplice prodotto esterno $\mathbf{R}_{xx} \sim \mathbf{x}\mathbf{x}^T$, la formulazione con gradiente stocastico vincolato o, semplicemente, LMS vincolato assume la forma

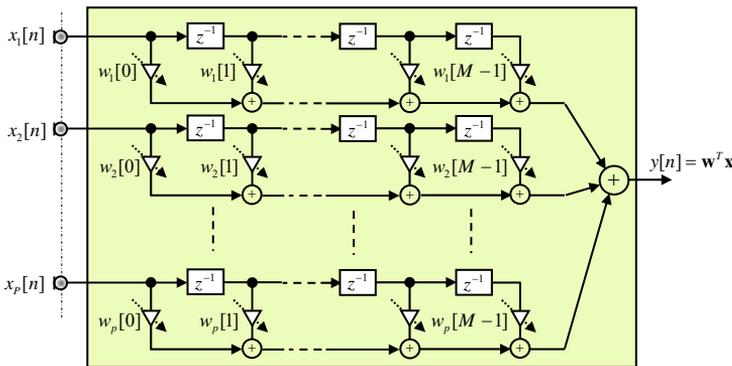
$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{P}_C [\mathbf{w}_n - \mu y[n] \mathbf{x}_n] + \mathbf{F} \quad (9.153)$$

dove $y[n]$ rappresenta l'uscita dell'array e il vettore dei pesi è inizializzato come $\mathbf{w}_0 = \mathbf{F}$. Il passo di adattamento μ che controlla la velocità di convergenza e il rumore a regime è, in genere, di tipo normalizzato o *normalized LMS* (NLMS). Per cui vale

$$\mu = \frac{\mu_0}{\mu_1 + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_j^2[n-k]} \quad (9.154)$$

con μ_0 e μ_1 scalari di valore opportuno (Cfr. Cap 3).

9.5.3.3 Sommario algoritmo ricorsivo di Frost



$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{P}}_C = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H, \quad \mathbf{P}_C = [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}}_C], \quad \mathbf{w}_0 = \tilde{\mathbf{P}}_C \mathbf{w}_{-1}; \\ &\text{per } n = 0, 1 \dots \{ \\ &\quad \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{P}_C [\mathbf{w}_n - \mu y[n] \mathbf{x}_n] + \mathbf{F}; \\ &\quad \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{P}}_C \mathbf{w}_{n+1} \end{aligned}$$

$$\mu = \mu_0 / (\mu_1 + \|\mathbf{x}_n\|_2^2).$$

```

}

. . .
Mf = 8;
muF = 0.2;
[FROST] = create_CN1_STRC_FROST_F( P, Mf, Kf, muF, 1e-2);
. . .

for each new input snap-shot x(n,P)

    [TDE, Teta, frac, xt ] = DOA_SF(TDE, x(n,:), ...);

    [FROST, y(n)] = CN1_STRC_FROST_F(FROST, xt);
    %

function [F, y] = CN1_STRC_FROST_F(F, x)
% *****
M = F.M;
K = F.K;
PM = F.PM;

%for each input snap-shot (externally defined loop) -----
F.xw(2 : PM) = F.xw(1 : PM-1); % shift all inputs delay-line
ch = 0;
for p = 1:M:PM % p = 1, M+1, 2M+1, ..., P*M+1
    ch = ch + 1; % channel index
    F.xw(p) = x(ch); % load new snap-shot into delay-line
end
y = F.xw'*F.w; % MISO filter output
% Adaptation -----
F.w = F.Pc*( F.w - F.mu*F.xw*y ) + F.F; % Constrained LMS (9.175)
F.F = F.P_c*F.w; % vincolo (C'*w = f)
% -----

function [F] = create_CN1_STRC_FROST_F( P, M, K, mu, delta)
% -----
PM = P*M;
w = zeros(PM,1); % W(QxP) MIMO filter weigths
for p=1:M:PM
    w(p) = 1.0;
end
%
```

```

% Algorithm matrices and buffers
X = zeros(K,P*M); % K-PM covar matrix for APA
xw = zeros(PM,1); % buffer for filter status
xd = zeros(K); % Buffer for run-time APA
dI = delta*eye(K);
C = zeros(M,PM);
f = ones(M,1);
%
for p=1:M:PM
    for m=1:M
        A(m,p+m-1) = 1;
    end
end
%
C = A';
P_c = C*inv(C'*C)*C';
Pc = eye(PM) - P_c; % operatore di proiezione (PMxPM) (9.173)
F = C*inv(C'*C)*f/2; % vettore quiescente (PMx1) eqn. (9.173)
Algorithm = 'CN1_MISO Frost - constrained APA/LMS';

FROST = struct('Algorithm', Algorithm, ...
    'P',P, 'M',M, 'PM',PM, 'K',K, 'mu',mu, 'w',W, 'xw',xw, ...
    'X',X, 'xd',xd, 'C',C, 'P_c',P_c, 'Pc',Pc, 'F', F, ...
    'dI', dI, 'f', f);
% -----
    
```

Osservazione

Il lettore può facilmente verificare che per C^H definita come in (9.145), la matrice di proiezione $\tilde{\mathbf{P}}_C = C(C^H C)^{-1} C^H$, per $M = 3$ e $P = 4$, è pari a

$$\tilde{\mathbf{P}}_C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}_{PM \times PM} \quad (9.155)$$

per cui, per M grande ($M > 20$), risulta $\mathbf{P}_C = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}}_C) \approx \mathbf{I}$. La formula di aggiornamento (9.153) può essere semplificata in $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu y[n] \mathbf{x}_n + \mathbf{F}$.

9.5.3.4 Interpretazione geometrica

Si definisce *piano del sottospazio di vincolo* Σ lo spazio nullo della matrice C^H , indicato come $\mathcal{N}(C^H)$ di dimensione $(PM - M)$ e che include il vettore nullo, il piano derivante della scrittura dell'equazione di vincolo in forma omogenea; per cui vale

$$\Sigma = \mathcal{N}(C^H) \triangleq \{ \mathbf{w} : C^H \mathbf{w} = \mathbf{0} \}. \quad \textit{piano del sottospazio di vincolo} \quad (9.156)$$

Nel caso di errore nullo il vettore dei pesi $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P(M) \times 1}$ soddisfa l'equazione di vincolo e perciò termina nell'*iperpiano di vincolo* Λ , di dimensione $(PM - M)$ e parallelo a $\mathcal{N}(\mathbf{C}^H)$, definito come lo spazio

$$\Lambda = \{ \mathbf{w} : \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \} \quad \text{iperpiano di vincolo} \quad (9.157)$$

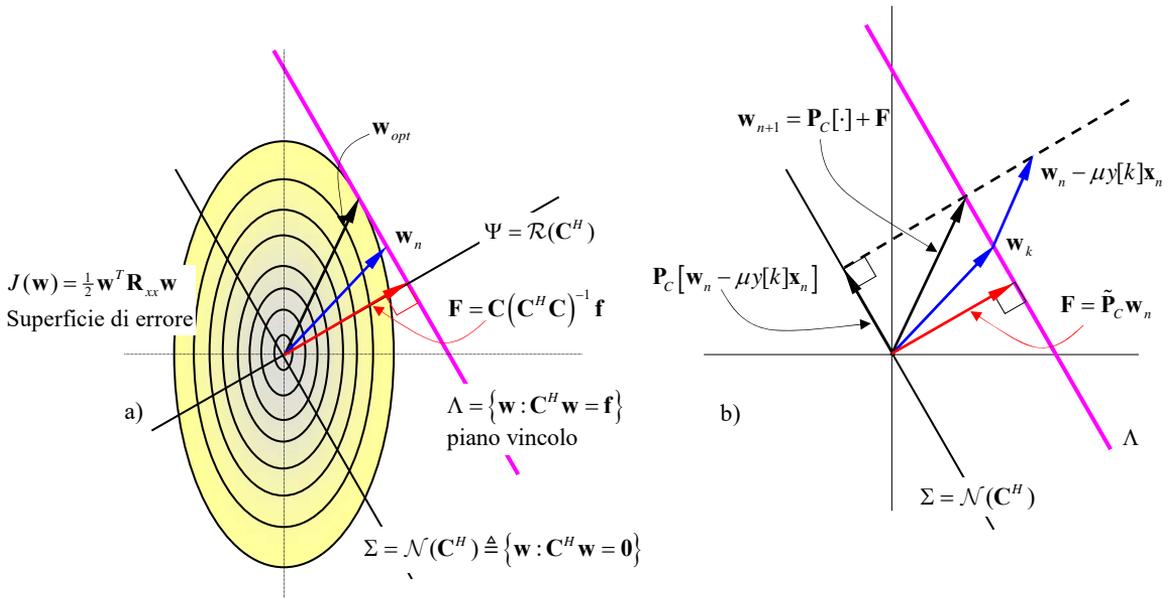


Figura 9.39 Rappresentazione 2D dell'LMS vincolato. a) La soluzione ottima consiste nel vettore con vertice nel punto di tangenza del piano di vincolo con il contorno della superficie di errore; b) rappresentazione vettoriale dell'LMS vincolato.

La soluzione vincolata necessaria per evitare la soluzione banale $\mathbf{w} = 0$, consiste nel determinare una soluzione che giace sul piano di vincolo tangente al contorno della superficie di errore stessa.

9.5.3.5 Soluzione ricorsiva: *gradient projection algorithm*

Si osservi che nell'espressione (9.150), usata per determinare LMS vincolato, l'ultimo termine sulla destra, proprio per la definizione del vincolo (9.142), può essere trascurato: $[\mathbf{f} - \mathbf{C}^H \mathbf{w}_n] \rightarrow 0$. Con quest'approssimazione l'espressione (9.153) può essere scritta in forma semplificata come

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= \mathbf{F} \\ \mathbf{w}_{n+1} &= \mathbf{w}_n - \mu \mathbf{P}_C \mathbf{y}[n] \mathbf{x}_n. \end{aligned} \quad (9.158)$$

L'interpretazione geometrica di quest'ultima espressione, nota come *gradient projection algorithm*, può essere facilmente ricavata dal lettore. Nella pratica, come osservato in [19], l'algoritmo (9.158) produce risultati molto simili all'adattamento fatto con la (9.153).

Per maggiori dettagli si rimanda all'articolo dell'autore [19].

9.5.3.6 Determinazione dei vincoli dell'LCMV

Il beamformer di Frost può essere facilmente modificato considerando presenti più vincoli provenienti da direzioni e frequenze diverse. È possibile, per esempio, imporre un massimo in una o più direzioni e/o tentare di annullare una certa interferenza proveniente anch'essa da una direzione nota.

Beamformer *Minimum Variance Distortionless Response* (MVDR)

Supponiamo di avere un vincolo spazio-frequenza, che impone una certa risposta in frequenza per una certa direzione θ_k . In questo caso la (9.142) assume la forma $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\omega, \theta_k) = g_k$, dove g_k una è costante complessa che indica il guadagno desiderato del beamformer per segnali di frequenza ω e direzione θ_k . Con tale formalismo l'espressione dell'LS vincolato **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** assume la forma semplificata

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega, \theta_k)}{\mathbf{a}^H(\omega, \theta_k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega, \theta_k)} g_k. \quad (9.159)$$

Nel caso $\theta_k = LD$ e $g_k = 1$, il BF (9.159) è detto *Minimum Variance Distortionless Response* (MVDR). In pratica, l'MVDR, è una forma semplice del LCMV con un singolo vincolo che prescrive una risposta spazio-frequenza unitaria nella LD.

Osservazione

L'espressione (9.159) può essere estesa considerando la presenza di vincoli multipli. Supponiamo, per esempio, di volere un guadagno g_0 lungo la direzione θ_0 , uno zero lungo la direzione θ_1 , un guadagno g_2 lungo la direzione θ_2 . La relazione di vincolo può, allora, essere scritta in modo vettoriale come

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\omega, \theta_0) \\ \mathbf{a}^H(\omega, \theta_1) \\ \mathbf{a}^H(\omega, \theta_2) \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} g_0^* \\ 0 \\ g_2^* \end{bmatrix}. \quad (9.160)$$

Nel caso avessimo $J < M$ vincoli lineari in \mathbf{w} risulta sempre possibile scriverli nella forma $\mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{f}$. In questo caso i vincoli sono linearmente indipendenti se \mathbf{C} ha rango pari a J .

Vincoli multipli di derivata ampiezza-frequenza

Un aspetto da tenere in attenta considerazione del sistema LCMV di Frost è che l'orientazione del fascio, con una modifica dello steering vector d'ingresso, non può essere inserita senza compromettere le prestazioni del beamformer stesso.

Una semplice variante per ovviare a tale inconveniente consiste nel modificare la struttura dei vincoli lineari per mezzo di opportune pesature spaziali. In pratica, come suggerito in [29], la matrice \mathbf{C}^H può essere modificata come

$$\mathbf{C}^H \in \mathbb{R}^{M \times (M)P} = \left[\text{diag}(c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,M-1}) \quad \dots \quad \text{diag}(c_{P,0}, c_{P,1}, \dots, c_{P,M-1}) \right]_{1 \times P} \quad (9.161)$$

dove, a differenza della (9.145), i blocchi della matrice \mathbf{C}^T sono diagonali ma non sono più unitari. La matrice di vincolo può essere quindi ridefinita sulla base di diverse filosofie quali, per esempio, presenza di più vincoli, vincoli sulla derivata direzionale del beam ecc.

In [28], per esempio, è stato definito un metodo di pesatura ottimo per l'inserimento di $J < M$ vincoli sull'ampiezza e sulla derivata direzionale. Pur essendo l'algoritmo di adattamento formalmente identico, l'inserimento di più vincoli porta a definire una matrice \mathbf{C}^H di dimensione $(JM \times PM)$ piuttosto che $(M \times PM)$; ovvero

$$\mathbf{C}^H \in \mathbb{R}^{J(M) \times (PM)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_0 & \tilde{\mathbf{C}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{C}}_{J-1} \end{bmatrix}_{J \times 1}^H \quad (9.162)$$

dove

$$\tilde{\mathbf{C}}_j^H \in \mathbb{R}^{M \times (M)P} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{c}}_P \end{bmatrix}_{1 \times P} \quad \text{con} \quad \tilde{\mathbf{c}}_p \in \mathbb{R}^{M \times M} = \text{diag}(c_{p,0}, c_{p,1}, \dots, c_{p,M-1})$$

mentre il vettore \mathbf{f} , che compare nella vincolo, è ridefinito come

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_0 & \tilde{\mathbf{f}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{f}}_{J-1} \end{bmatrix}^T; \quad (9.163)$$

Ogni vettore di vincolo $\tilde{\mathbf{c}}_p$ con il corrispondente scalare $f_{j,p}$ piazza un vincolo sul vettore dei pesi \mathbf{w}_p . I coefficienti $\tilde{\mathbf{c}}_p$ descrivono la risposta in ampiezza spazio-frequenza (il guadagno è funzione sia dell'angolo sia della frequenza), nella direzione di osservazione (vincoli di ampiezza e di derivata prima). Per forzare a zero i vincoli di derivata di ordine superiore il vettore in (9.163) dovrà essere tale che $\tilde{\mathbf{f}}_j = \mathbf{0}_M$ per $j = 1, 2, \dots, J-1$.

In pratica i vincoli di derivata sono impiegati per influenzare la risposta su una regione di direzione-frequenza forzando la derivata delle risposta del beamformer ad assumere valore nullo in certe punti direzione-frequenza. Tali vincoli sono impiegati in aggiunta a quelli spaziali. Un esempio i cui i vincoli di derivata sono utili è quello in cui la direzione di arrivo è nota in modo approssimato: se il segnale arriva vicino al punto di vincolo, il vincolo di derivata previene la possibilità di avere una risposta nulla nella direzione desiderata [17].

Vincoli di autovettore

Tali vincoli sono basati sull'approssimazione ai minimi quadrati del beam spazio-frequenza desiderato e usati per controllare la risposta del beamformer.

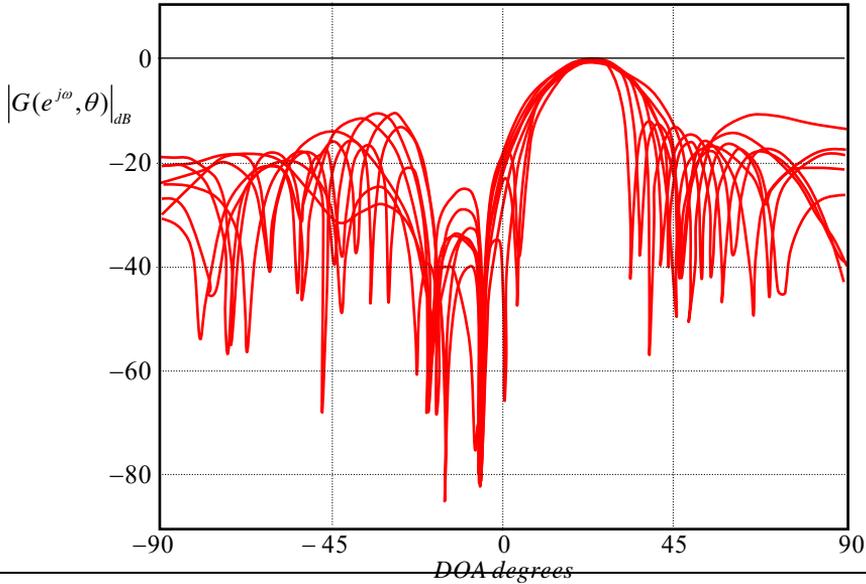


Figura 9.40 Risposta in ampiezza di un LCMV *beamformer* lineare: con $M=16$, $N=5$, distanza tra i sensori $d = \lambda/2|_{\omega=4\pi/5}$, valutato per otto frequenze nell'inter-vello (normalizzato) $2\pi/5$ e $4\pi/5$. Sono presenti due interferenze con DOA a -5.75° e a -17.5° in presenza di rumore bianco [17].

Consideriamo un insieme di vincoli che permettono il controllo spazio-frequenza del beam verso una sorgente di direzione θ_0 nella banda di frequenza $[\omega_a, \omega_b]$. La dimensione dello span dello steering vector $\mathbf{a}(\omega, \theta_0)$ su tale banda di frequenze è approssimativamente dato dal prodotto TBWP precedentemente discusso. Scegliendo il numero di punti di vincolo J significativamente grande rispetto al TBWP, i vincoli di sottospazio derivati dalla formulazione delle equazioni normali (9.99), come approssimazione di rango M della steering matrix \mathbf{A} , può essere definita dalla sua decomposizione in valori singolari (SVD)

$$\mathbf{A}_M = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}_M\mathbf{U}^H \quad (9.164)$$

dove $\mathbf{\Sigma}_M$ è una matrice diagonale contenente i valori singolari di \mathbf{A} , mentre le M colonne di \mathbf{V} e \mathbf{U} sono rispettivamente i vettori singolari sinistri e destri di \mathbf{A} corrispondenti a tali valori singolari. Con la decomposizione (9.164), la (9.99) può essere riformulata come

$$\mathbf{V}^H \mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}_M^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{r}_d . \quad (9.165)$$

Quest'ultima ha la stessa forma dell'equazione di vincolo $\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$, in cui la matrice, in questo caso, è pari a \mathbf{V} che contiene gli autovettori di $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ (da cui il nome vincoli di autovettore).

In Figura 9.40, è riportato la risposta di un beamformer LCMV con otto frequenze equispaziate nell'intervallo $[2\pi/5, 4\pi/5]$ con due interferenze dalle direzioni -5.75° e -17.5° in presenza di rumore bianco. Le interferenze hanno spettro bianco nella banda $[2\pi/5, 4\pi/5]$ e potenze di 40 e 30 dB rispettivamente relative al rumore bianco. I vincoli sulla risposta desiderata sono: guadagno unitario e fase lineare per $\omega \in [2\pi/5, 4\pi/5]$ e un angolo $\theta = 18^\circ$ (zero altrove) e formulato con la (9.165) considerando i primi dieci autovalori. La consistenza dei vincoli è evidente poiché ogni curva della risposta del beamformer passa per 0dB a 18° . Si osservi, inoltre, che le risposte sono nulle per gli angoli delle interferenze. Il guadagno dell'array, in questo caso, è pari a -50 dB.

9.6 Beamforming adattativo

Data dependent BF - adattamento on-line :

- i rispetto alla statistica del campo di rumore
- rispetto alla statica del segnale utile.
- rispetto entrambe statistiche.

Gli algoritmi MISO o MIMO, **implementati nel dominio del tempo o in quello della frequenza**, sono basati sulla statistica del primo e del secondo ordine.

9.6.1 Introduzione al beamforming adattativo: il cancellatore adattativo di rumore multiple

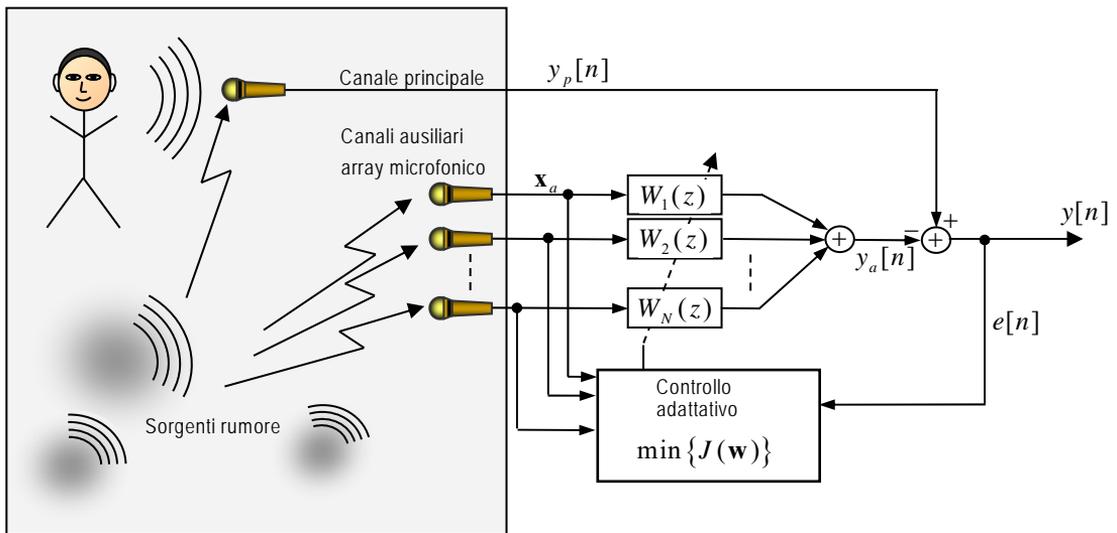


Figura 9.41 *Multiple Sidelobe Canceler* (MSC) con array microfonico.

9.6.2 Cancellatore di interferenze multiple: *Generalized Sidelobe Canceller (GSC)*

Il GSC rappresenta una forma **alternativa per implementare l'LCMV** in cui vengono separate le **componenti vincolate da quelle non vincolate**.

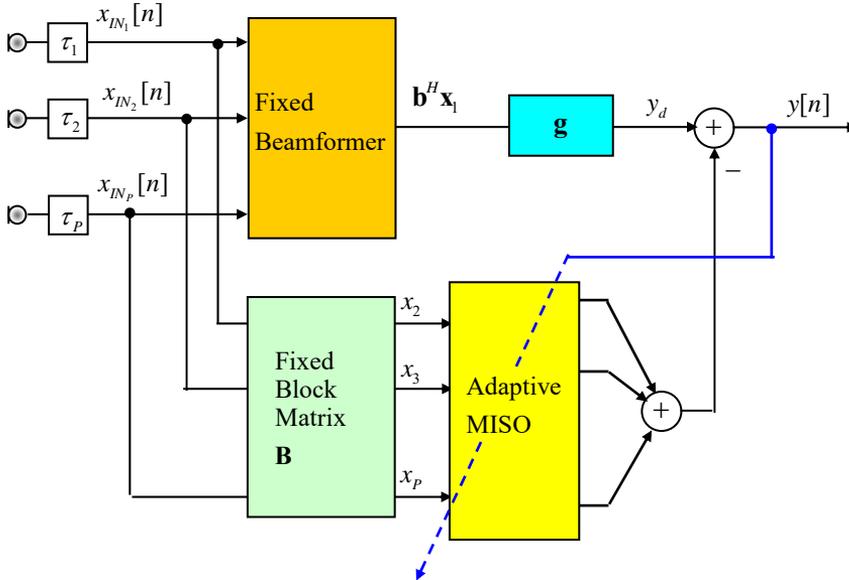


Figura 9.42 GSC standard con Block Matrix (BM) fissata a priori.

Il sub-processo fisso (parte alta in figura) è un beamformer convenzionale con uscita

$$x_1[n] = \mathbf{b}^H \mathbf{x}_1 \quad (9.166)$$

dove i coefficienti \mathbf{b}^H , tutti diversi da zero, sono scelti secondo delle specifiche sulla larghezza del lobo principale e dell'attenuazione di quelli secondari. Il vincolo sul segnale $x_1[n]$ è definito, inoltre, con il filtro FIR \mathbf{g} , che agisce sul segnale, determinandone il guadagno in frequenza e la fase prescritti, per cui

$$y_d[n] = \sum_{k=0}^{M-1} g_k x_1[n-k] \quad (9.167)$$

in genere, si impone anche la normalizzazione

$$\sum_{k=0}^{M-1} g_k = 1. \quad (9.168)$$

Il sub-processo adattativo (parte bassa in figura), detto anche *cancellatore di interferenza*, è un beamformer adattativo che agisce sui disturbi che verranno sottratti dal processo principale.

Il cancellatore di interferenza è costituito da una trasformazione \mathbf{B} seguita da un banco di $(P - 1)$ filtri FIR adattativi di lunghezza M .

Con riferimento alla Figura 9.43, detto $\mathbf{x}[n]$ lo *snap shot*, all' n -esimo istante temporale, il segnale d'ingresso ai filtri adattativi \mathbf{v} , la matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(P-1) \times P}$, detta matrice di blocco, è tale che

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{B}\mathbf{x}_{IN}[n]. \tag{9.169}$$

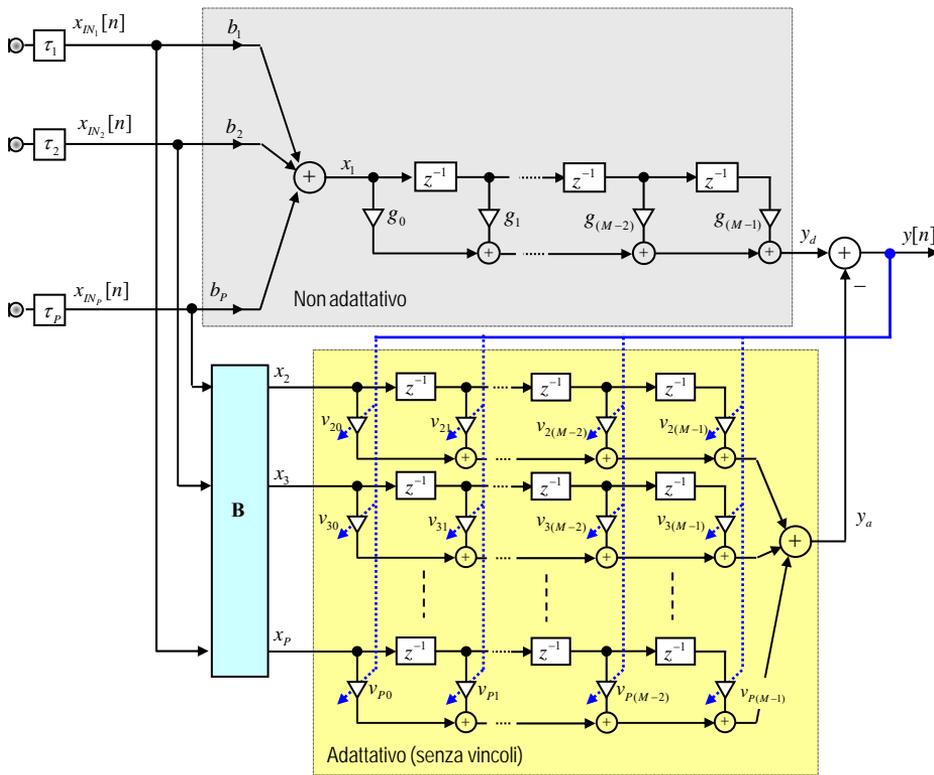


Figura 9.43 Schema del *generalized sidelobe canceller* (GSC) [23].

Detta $\mathbf{s}[n] = \mathbf{a}(\omega, \theta)\mathbf{s}[n]$ la *componente utile* del segnale, il modello del segnale ai ricevitori risulta ridefinito come $\mathbf{x}_{IN}[n] = \mathbf{s}[n] + \mathbf{n}[n]$. Nel GSC la trasformazione \mathbf{B} ha il compito di eliminare la componente utile $\mathbf{s}[n]$, presente in ingresso al banco filtri \mathbf{v} . In questo modo in ingresso al processo adattativo è presente solo la parte d'interferenza $\mathbf{n}[n]$ che verrà sottratta dal processo fisso imponendo la minimizzazione della potenza in uscita.

9.6.2.1 Determinazione della matrice di blocco

Il segnale $s[n]$ è, per definizione, incidente con fase identica sui sensori. I segnali provenienti da direzioni diverse, rumore e interferenze, hanno una fase diversa su ogni sensore.

Per ottenere la cancellazione di $s[n]$ è sufficiente determinare la matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(P-1) \times P}$ in modo tale che la somma degli elementi di ogni riga sia nulla, ovvero

$$b_{ij} \therefore \sum_{j=1}^P b_{ij} = 0, \quad 2 \leq i \leq P \quad (9.170)$$

con la precedente condizione, infatti, la (9.169) impone l'annullamento della parte in fase di ogni *snap-shot*.

Per maggiore comprensione, consideriamo un caso con quattro sensori ($P=4$), con una matrice \mathbf{B} scelta, come indicato in (9.170), in modo che la somma degli elementi di ogni riga sia nulla. Indicando con $x_{iN_k}[n] = s[n] + n_k[n]$, il segnale al k -esimo sensore, scrivendo esplicitamente la (9.169), omettendo per semplicità la scrittura dell'indice $[n]$, abbiamo

$$\begin{aligned} x_2 &= (b_{21} + b_{22} + b_{23} + b_{24})s + b_{21}n_1 + b_{22}n_2 + b_{23}n_3 + b_{24}n_4 \\ x_3 &= (b_{31} + b_{32} + b_{33} + b_{34})s + b_{31}n_1 + b_{32}n_2 + b_{33}n_3 + b_{34}n_4 \\ x_4 &= (b_{41} + b_{42} + b_{43} + b_{44})s + b_{41}n_1 + b_{42}n_2 + b_{43}n_3 + b_{44}n_4 \end{aligned} \quad (9.171)$$

in cui è chiaro che la componente $s[n]$, identica per tutti i sensori, è eliminata da ogni equazione imponendo il vincolo $b_{k1} + b_{k2} + b_{k3} + b_{k4} = 0$ per $k = 2, 3, 4$. Ne segue che il segnale $x_k[n]$ è una combinazione lineare dei soli segnali interferenti.

Il vincolo (9.170) indica che \mathbf{B} è caratterizzata da $P-1$ **righe linearmente indipendenti con somma nulla**.

Tra tutte le matrici che soddisfano la (9.170), per $P=4$, alcune possibili scelte per la matrice \mathbf{B} sono, per esempio,

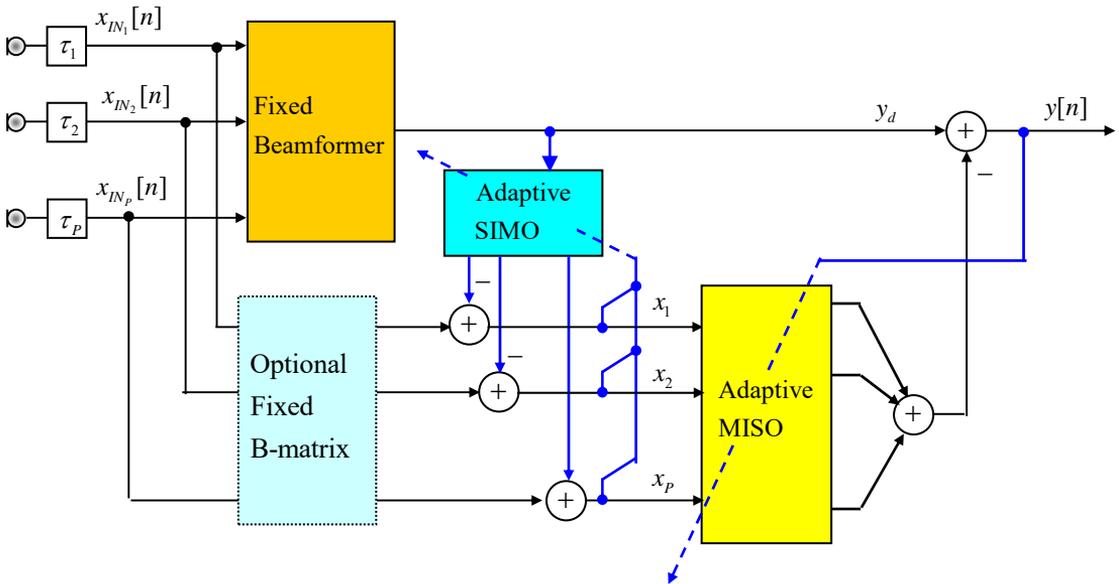
$$\begin{bmatrix} 0.87 & -0.29 & -0.29 & -0.29 \\ 0 & 0.82 & -0.41 & -0.41 \\ 0 & 0 & 0.71 & -0.71 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.172)$$

Per la scelta di \mathbf{B} , alcuni autori suggeriscono di determinare i coefficienti in modo tale che la trasformazione possa effettuarsi con sole operazioni somma-differenza.

Osservazione

- **In presenza di riverbero, la cancellazione effettuata dalla matrice di blocco riguarda la sola componente diretta di $s[n]$. Le componenti riflesse, provenienti da tutte le direzioni, non sono più in fase sui sensori e non vengono bloccate dalla matrice \mathbf{B} .**
- **Ne segue che il GSC attenua, oltre che il rumore non in fase, anche le componenti riverberate del segnale utile.**

Versione alternativa (più recente)



- [] O. Hoshuyama, .A. Sugiyama and A. Hirano, “A Robust Adaptive Beamformer for Microphone Arrays with a Blocking Matrix Using Constrained Adaptive Filters”, IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 47, NO. 10, OCTOBER 1999.
- [] Wolfgang Herboldt, Herbert Buchner,, Satoshi Nakamura, and Walter Kellermann, “Multichannel Bin-Wise Robust Frequency-Domain Adaptive Filtering and Its Application to Adaptive Beamforming”, IEEE TRANSACTIONS ON AUDIO, SPEECH, AND LANGUAGE PROCESSING, VOL. 15, NO. 4, MAY 2007.

9.6.2.2 Adattamento del GSC

L'uscita della parte adattativa del beamformer in notazione composita risulta essere pari a

$$y_a[n] = \mathbf{v}^H \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{v} \quad (9.173)$$

in cui, analogamente alla (9.34), $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_2^T \quad \mathbf{x}_3^T \quad \dots \quad \mathbf{x}_p^T]^T$, $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_2^T \quad \mathbf{v}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{v}_2^T]^T$ e l'elemento \mathbf{x}_k contiene i valori della delay line del k -esimo filtro ovvero $\mathbf{x}_k^T = [x_k[n] \quad x_k[n-1] \quad \dots \quad x_k[n-M+1]]$.

GSC con algoritmo on-line

L'uscita del GSC è pari a

$$y[n] = y_d[n] - y_a[n] \quad (9.174)$$

coincidente con il segnale di errore del processo di adattamento che, allora, può essere effettuato senza imporre alcun vincolo. Nel caso venga usato il semplice algoritmo LMS, l'espressione di adattamento è pari a

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n - \mu y[n] \mathbf{x}_n . \quad (9.175)$$

Per cui l'adattamento di tipo LMS, coincide con quello di un normale filtro adattativo multicanale (Cfr. §5.3.5).

Osservazione

Il GSC tende a ridurre in uscita il contributo di rumore e, per non provocare distorsioni sul segnale utile, è opportuno adattare i filtri quando in ingresso è presente il solo rumore.

GSC con algoritmo di blocco

Consideriamo lo schema semplificato di Figura 9.44 dove, con riferimento alla Figura 9.43, per semplicità, i coefficienti $b_i = 1$ per $i = 1, \dots, P$. L'uscita del GSC è pari a

$$y[n] = y_d[n] - y_a[n] = \mathbf{x}_{IN}^H \mathbf{g} - \mathbf{x}_{IN}^H \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (9.176)$$

per cui la struttura della (9.176) rivela la somiglianza con l'LCMV discusso in precedenza.

Definendo \mathbf{w} il vettore di tutti i parametri del beamformer, $\mathbf{w} \triangleq \mathbf{g} - \mathbf{B} \mathbf{v}$; la formula di adattamento di blocco di Frost (9.142) può essere riscritta come

$$\min_{\mathbf{v}} \{ (\mathbf{g} - \mathbf{B} \mathbf{v})^H \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{g} - \mathbf{B} \mathbf{v}) \} \quad (9.177)$$

con soluzione rispetto a \mathbf{v} espressa come

$$\mathbf{v}_{opt} = (\mathbf{B}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{g} . \quad (9.178)$$

Definendo la matrice di covarianza di \mathbf{x} come $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{B}^H \mathbf{R}_{x_{IN} x_{IN}} \mathbf{B}$ e il vettore di crosscorrelazione tra \mathbf{x} e \mathbf{y}_d come $\mathbf{p}_{xy_d} = \mathbf{B}^H \mathbf{R}_{x_{IN} x_{IN}} \mathbf{g}$, la soluzione ottima, per la parte adattativa del GSC, può essere riscritta in forma compatta di Wiener come

$$\mathbf{v}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xy_d} . \quad (9.179)$$

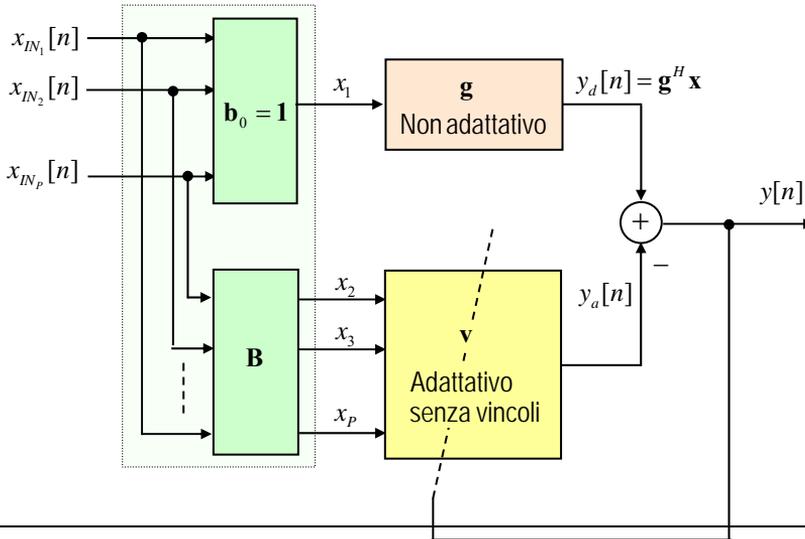


Figura 9.44 Struttura a blocchi del GSC.

Osservazione

La formulazione (9.178) si presta per un'interessante connessione con il metodo LCMV. Allo scopo consideriamo il vincolo lineare $C^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$ del beamformer di Frost che nel caso del GSC diventa

$$C^H (\mathbf{g} - \mathbf{B}\mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad (9.180)$$

per cui, volendo determinare \mathbf{B} in modo che il GSC coincida con il LCMV, è sufficiente imporre la soluzione ottima **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** di seguito riscritta

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \quad (9.181)$$

dove sostituendo $\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{g} - \mathbf{B}\mathbf{v}_{opt}$ e per la (9.178), può essere scritta come

$$[\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{R}_{xx}] \mathbf{g} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}. \quad (9.182)$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\mathbf{B}^H \mathbf{R}_{xx}$ si ottiene

$$\mathbf{B}^H \mathbf{R}_{xx} \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{B}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{R}_{xx}]}_{=0} \mathbf{g} = \mathbf{B}^H \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \quad (9.183)$$

dove si può osservare che la parte a sinistra tra parentesi quadre è pari zero. Semplificando è facile verificare che, essendo per definizione $[\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, vale, necessariamente, la condizione

$$\mathbf{B}^H \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (9.184)$$

Per cui, in conclusione di questo ragionamento, si evince che il vincolo di Frost (9.180) può essere suddiviso in due parti

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^H \mathbf{g} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{C}^H \mathbf{B} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9.185)$$

La prima delle precedenti equazioni indica che $\mathbf{g} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}$, ovvero per il vincolo di Frost $\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$, vale

$$\mathbf{g} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}. \quad (9.186)$$

Ciò implica che ogni colonna della matrice di blocco deve essere ortogonale al vettore dei pesi \mathbf{g} : $\mathbf{B}\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Inoltre, dato che la matrice \mathbf{C}^H è rettangolare con un numero di colonne pari al numero $J < M$ di vincoli lineari, la dimensione dello spazio nullo di \mathbf{B} è proprio pari al numero dei vincoli $J = \dim(\mathbf{f})$ e le proprietà di blocco derivano proprio da tale spazio nullo. Risulta, infatti, che le dimensioni della matrice rettangolare \mathbf{B} sono $[(P - J) \times P]$, inoltre, la matrice \mathbf{B} ha colonne linearmente indipendenti e che soddisfano la condizione $\mathbf{B}^H \mathbf{C} = \mathbf{0}$.

Si osservi che la (9.186) non dipende da \mathbf{R}_{xx} e che la matrice $\mathbf{C}[\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1}$ è la pseudoinversa di \mathbf{C}^H . La (9.186) fornisce la soluzione a minima energia (norma minima) del problema di ottimizzazione con vincolo $\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$. È interessante osservare, inoltre, che

$$\mathbf{g}^H \mathbf{g} = \mathbf{f}^H [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}. \quad (9.187)$$

Interpretazione geometrica GSC

Consideriamo la soluzione del LCMV \mathbf{w}_{opt} (riportata in (9.181)) e consideriamo la decomposizione del vettore ottimo come somma di due vettori tra loro ortogonali

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{g} - \mathbf{B}\mathbf{v}_{opt} = \mathbf{g} + \tilde{\mathbf{v}}_{opt}. \quad (9.188)$$

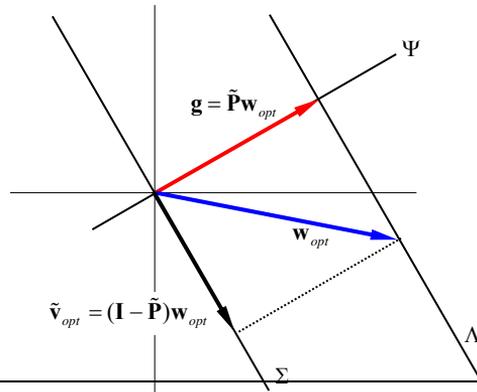


Figura 9.45 Interpretazione geometrica del GSC.

Per la (9.186), valutata per \mathbf{w}_{opt} , il vettore \mathbf{g} risulta essere una proiezione di \mathbf{w}_{opt} nello spazio immagine di \mathbf{C} (indicato con Ψ o con $\mathcal{R}(\mathbf{C})$), mentre il vettore $\tilde{\mathbf{v}}_{opt}$ è una proiezione di \mathbf{w}_{opt} nello spazio nullo di \mathbf{C}^H (indicato con Σ o con $\mathcal{N}(\mathbf{C}^H)$). Definendo, analogamente a quanto illustrato in precedenza in (9.46) e (9.47), le rispettive matrici di proiezione in Ψ e del suo complemento ortogonale Σ come

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{C}[\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \quad \text{spazio immagine di } \mathbf{C} \text{ o } \mathcal{R}(\mathbf{C}) \quad (9.189)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}} \quad \text{spazio nullo di } \mathbf{C}^H \text{ o } \mathcal{N}(\mathbf{C}^H) \quad (9.190)$$

vale,

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{w}_{opt} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{opt} &= \mathbf{P} \mathbf{w}_{opt} = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}}) \mathbf{w}_{opt} \end{aligned} \quad (9.191)$$

con rappresentazione grafica riportata in Figura 9.45.

Osservazione

La (9.188) coincide proprio con la struttura di Figura 9.44. Dalle precedenti considerazioni segue che \mathbf{g} rappresenta un beamformer deterministico, indipendente dai dati, che fornisce una risposta che nel sottospazio Ψ e che minimizza la potenza di rumore bianco. Nel percorso in basso del GSC, la matrice \mathbf{B} blocca gli elementi di \mathbf{x} nel sottospazio Ψ . Il vettore \mathbf{v} combina l'uscita della matrice di blocco \mathbf{B} in modo da minimizzare la potenza in uscita esterna al sottospazio Ψ . In pratica i vincoli sono implementati in modalità fissa mentre la minimizzazione dei filtri \mathbf{v} consiste in un semplice processo adattativo privo di vincoli.

9.6.2.3 GSC notazione composta con J vincoli

Nel caso siano presenti un numero di vincoli $J > 1$, è conveniente riferirsi alla struttura generale illustrata in Figura 9.46, dove la struttura del BF è definita su un doppio percorso e il GSC viene ridisegnato in modo semplificato come un unico filtro spazio-temporale.

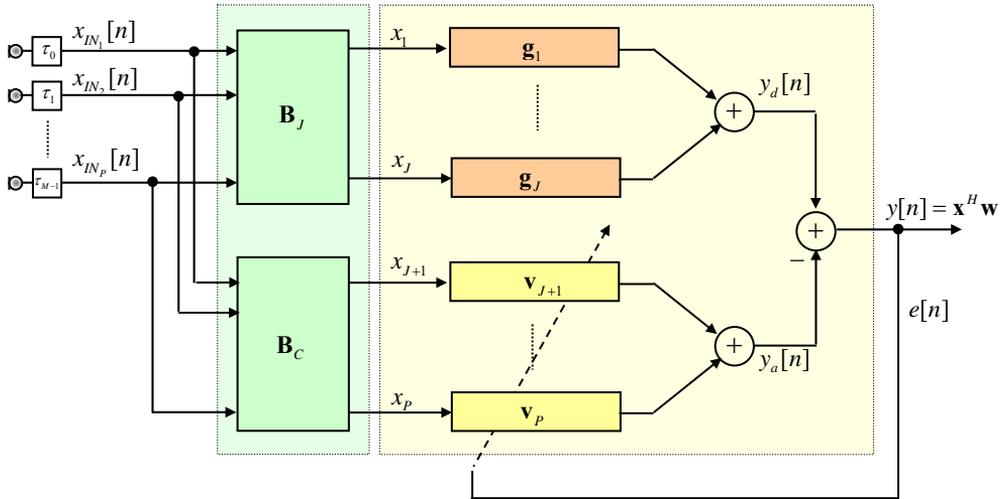


Figura 9.46 GSC in notazione composta.

Consideriamo i filtri della parte fissa e adattativa della stessa lunghezza M per cui possiamo definire i vettori

$$\mathbf{g} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{J(M) \times 1} = [\mathbf{g}_1^T \ \dots \ \mathbf{g}_J^T]_{J \times 1}^T \quad (9.192)$$

$$\mathbf{v} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{(P-J)(M) \times 1} = [\mathbf{v}_{J+1}^T \ \dots \ \mathbf{v}_P^T]_{(P-J) \times 1}^T. \quad (9.193)$$

Consideriamo, inoltre, i vettori composti d'ingresso e dei pesi secondo le seguenti partizioni

$$\mathbf{x} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P(M) \times 1} = \left[[\mathbf{x}_1^T \ \dots \ \mathbf{x}_J^T] \ [\mathbf{x}_{J+1}^T \ \dots \ \mathbf{x}_P^T] \right]_{2 \times 1}^T \quad (9.194)$$

$$\mathbf{w} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{P(M) \times 1} = \left[\mathbf{g}^T \ -\mathbf{v}^T \right]_{2 \times 1}^T \quad (9.195)$$

l'uscita del beamformer è riscritta in forma compatta come

$$\begin{aligned} y[n] &= \left[[\mathbf{x}_1^T \ \dots \ \mathbf{x}_J^T] \ [\mathbf{x}_{J+1}^T \ \dots \ \mathbf{x}_P^T] \right] \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}^H \mathbf{w} \end{aligned} \quad (9.196)$$

in cui \mathbf{g} rappresenta la parte fissa mentre \mathbf{v} la parte variabile del filtro \mathbf{w} .

La matrice \mathbf{B} può essere pensata come costituita dalla partizione di una matrice di vincolo \mathbf{B}_J e una matrice di blocco \mathbf{B}_C . Possiamo, quindi, scrivere

$$\mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{B}_J^{J \times P} \\ \mathbf{B}_C^{(P-J) \times P} \end{bmatrix}. \quad (9.197)$$

Si osservi che nella struttura a blocchi del GSC in Figura 9.44, si è supposta una matrice \mathbf{B}_J costituita con un solo vettore. Per semplicità di trattazione, molto spesso, ci si riferisce proprio al caso in cui è presente un solo vincolo ($J = 1$), per cui in questo caso, la matrice \mathbf{B}_J è costituita dal vettore riga i cui elementi sono tutti diversi da zero: $b_{0,i} \neq 0$ per $i = 1, \dots, P$. Per esempio, con un numero di sensori $P = 4$ una scelta della matrice \mathbf{B} potrebbe essere la seguente

$$\begin{bmatrix} b_{0,1} & b_{0,2} & b_{0,3} & b_{0,4} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9.198)$$

9.6.2.4 GSC nel dominio della frequenza

Gli algoritmi descritti nelle precedenti sezioni, procedendo come nel Cap. 7, possono facilmente essere riformulati con algoritmi in dominio trasformato. Vediamo adesso, a titolo di esempio, la riformulazione del GSC nel dominio della frequenza.

Definiamo il vettore $\mathbf{x}_{m,k}$ come *data record*, di lunghezza L , dell' m -esimo sensore del segnale d'ingresso relativo al k -esimo istante. Per cui

$$\mathbf{x}_{m,k} = [x_m[kL] \quad x_m[kL+1] \quad \cdots \quad x_m[kL+L-1]]^T. \quad (9.199)$$

Detta M la lunghezza dei filtri del GSC, per l'implementazione del metodo *overlap-and-save*, (Cfr. §7.3.3) detta N la lunghezza della DFT (calcolata con la FFT) occorre che $N \geq L + M - 1$ in modo tale che gli L campioni del blocco in uscita possano essere propriamente calcolati. Per semplicità si suppone, inoltre, che la lunghezza dei filtri sia multipla intera della lunghezza del blocco ($M = SL$) e, sempre per semplicità, imponiamo che la lunghezza della FFT sia pari a $N = L + M = L(S + 1)$. Allora, per ottenere gli N punti della FFT, indicati con $\mathbf{X}_{m,k}$, sono necessari gli ultimi $(S + 1)$ blocchi dei vettori d'ingresso. Per cui vale

$$\mathbf{X}_{m,k} = \mathbf{F} \cdot [\mathbf{x}_{m,k-S} \quad \mathbf{x}_{m,k-S+1} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{m,k}]^T \quad (9.200)$$

in cui definendo il fasore, $F_N = e^{-j2\pi/N}$, la matrice DFT, \mathbf{F} tale che $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H/N$, è definita come ($\mathbf{F} \therefore f_{kn} = F_N^{kn}$ $k, n \in [0, N-1]$). Indicando con \otimes l'operatore di Hadamard l'uscita del filtro dell' m -esimo canale adattativo risulta

$$\mathbf{Y}_{m,k} = \mathbf{W}_{m,k} \otimes \mathbf{X}_{m,k} \quad (9.201)$$

per cui l'uscita, nel dominio della frequenza, dell'intero beamformer risulta

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_{1,k} - \sum_{m=2}^P \mathbf{Y}_{m,k}. \quad (9.202)$$

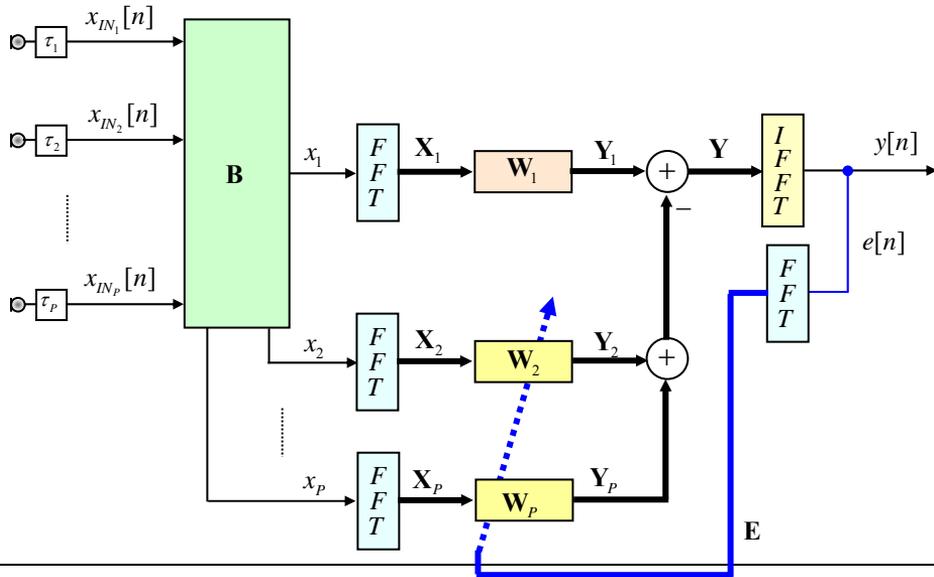


Figura 9.47 GSC in notazione compatta nel dominio della frequenza per $J=1$.

Con il metodo overlap-save, i campioni nel dominio del tempo dell'uscita

$$\mathbf{y}_k = [y[kL] \quad y[kL+1] \quad \cdots \quad y[kL+L-1]]^T \quad (9.203)$$

sono determinati selezionando solo gli ultimi L campioni del vettore, per cui il blocco di uscita, espresso come antitrasformata, vale

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_{0,L} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Y}_k \quad (9.204)$$

dove per $N = L + M$, $\mathbf{g}_{0,L} \in \mathbb{R}^{(N \times N)}$ è una matrice di pesatura, detta anche *matrice di proiezione di uscita*, definita come

$$\mathbf{g}_{0,L} \in \mathbb{R}^{(M+L) \times (M+L)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M,M} & \mathbf{0}_{M,L} \\ \mathbf{0}_{L,M} & \mathbf{I}_{L,L} \end{bmatrix}. \quad (9.205)$$

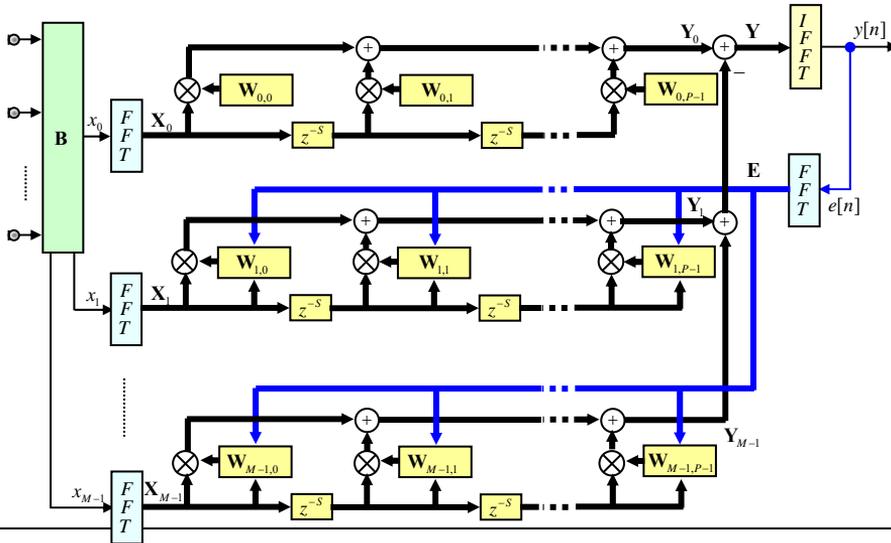


Figura 9.48 Diagramma a blocchi del *partitioned frequency domain adaptive beamformer* [26].

In pratica, la moltiplicazione per $\mathbf{g}_{0,L}$ forza a zero i primi M campioni lasciando invariati gli ultimi L .

Il BF è un sistema MISO per cui per l'adattamento si può procedere adattando i singoli canali del banco con una delle procedure FDAF descritte in §7.3.

In alcune applicazioni tipiche dei beamformer il ritardo sistematico tra ingresso e uscita dovuto a una elaborazione di blocco non è ammissibile. Si pensi, per esempio, a un array di microfoni usato come ausilio all'ascolto per soggetti con problemi all'apparato uditivo. In questi casi l'approccio nel dominio della frequenza, così com'è stato illustrato nel precedente paragrafo, non può essere usato.

Un possibile rimedio, nei casi in cui la lunghezza dei filtri abbia durata molto lunga, è possibile partizionando la risposta impulsiva in varie parti. L'algoritmo già discusso nel caso del filtraggio adattativo mono canale nel §7.4, è una estensione multicanale del *partitioned frequency domain adaptive filter*. Data la linearità del sistema, l'uscita totale del filtro può essere calcolata come somme delle uscite relative alle partizioni della risposta impulsiva.

Il diagramma a blocchi del così detto *Partitioned Frequency Domain Adaptive BF* (PFDAF) (Cfr. §7.4) è riportato in Figura 9.48. Per i dettagli si rimanda a [26].

9.6.3 Beamforming GSC robusti

Come già indicato nel BF a massimo SNR (Cfr. §9.5.1) per aumentare la robustezza dei beamformer LCMV o GSC, oltre ai vincoli lineari singoli o multipli, è possibile inserire vincoli relativi alla funzione di sensibilità. Considerando i disturbi incorrelati, risulta che la sensibilità del beamformer è inversamente proporzionale al guadagno di rumore bianco. Per cui un semplice espediente per aumentare la robustezza consiste nel limitare il guadagno di rumore bianco GW . Come suggerito da Cox (Cfr. §9.5.1.2), per aumentare la robustezza a perturbazioni casuali sui sensori, è usuale aggiungere un vincolo di disuguaglianza di natura quadratica del tipo

$$\min_{\mathbf{w}} \{ \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \} \quad \text{s.a.v.} \quad \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}; \quad \mathbf{w}^H \mathbf{w} \leq GW_{\max}. \quad (9.206)$$

Si dimostra facilmente che la soluzione LS assume la forma (9.146)

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{(\mathbf{R}_{xx} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}}{\mathbf{C}^H (\mathbf{R}_{xx} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}} \mathbf{f} \quad (9.207)$$

dove il parametro di regolarizzazione $0 \leq \delta < \infty$ è scelto sulla base della tipologia del campo di rumore.

Nel caso di beamformer GSC, $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})^{(P(M) \times 1)} = [\mathbf{g}^T \quad -\mathbf{v}^T]^T$, rappresenta il vettore di tutti i parametri liberi del beamformer e la soluzione ottima $\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{g} - \mathbf{B} \mathbf{v}_{opt}$, come precedentemente illustrato, può essere decomposta in due componenti ortogonali. Il vincolo sul guadagno di rumore bianco nella (9.206) può essere espresso come $\mathbf{g}^H \mathbf{g} + \mathbf{v}^H \mathbf{B}^H \mathbf{B} \mathbf{v} \leq GW_{\max}$ che determina una forma del tipo

$$\mathbf{v}^H \mathbf{v} \leq \beta^2 = GW_{\max} - \mathbf{g}^H \mathbf{g}. \quad (9.208)$$

In questo caso la soluzione \mathbf{v}_{opt} , è un'estensione della (9.179) e risulta pari a

$$\mathbf{v}_{opt} = (\mathbf{R}_{xx} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{p}_{xy_d} \quad (9.209)$$

che può essere espressa come

$$\mathbf{v}_{opt} = (\mathbf{I} + \delta \mathbf{R}_{xx})^{-1} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xy_d} = (\mathbf{I} + \delta \mathbf{R}_{xx})^{-1} \hat{\mathbf{v}}_{opt} \quad (9.210)$$

dove con $\hat{\mathbf{v}}_{opt}$ si è indicata la soluzione ottima, senza vincolo quadratico, definita dalla (9.179).

9.6.4 Beamforming in ambiente riverberante

In alcune applicazioni del beamforming (BF), come nella cattura del segnale vocale in ambienti riverberanti, il rumore in cui si opera può avere natura sia coerente sia incoerente. Come precedentemente illustrato la presenza del riverbero genera un campo di rumore diffuso e difficilmente predicibile. In questi casi, un'architettura di BF troppo rigida potrebbe non essere ottimale in tutte le condizioni di lavoro.

In questo paragrafo sono illustrate e discusse alcune varianti di BF in grado di operare in campo riverberato.

9.6.4.1 Beamformer linearmente vincolato con vincolo adattativo

Una variante del LCMV, che consente di operare in ambienti con campo di rumore sia coerente sia incoerente, presentata in [33], permette di attenuare il rumore lungo la LD e, contemporaneamente, di adattare un *postfilter* per sopprimere il rumore diffuso. Il metodo, detto *Linearly Constrained Beamforming with Adaptive Constraint Value*, in pratica coincide con l'LCMV descritto in precedenza, in cui il filtro di vincolo non è fissato a priori ma è anch'esso adattativo e implementato come filtro di Wiener. In pratica, il criterio di ottimizzazione massimizza la potenza del beamforming lungo la LD in presenza di un vincolo adattato. La (9.142) è ridefinita come

$$\min_{\mathbf{w}} \{ \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \} \quad \text{s.a.v.} \quad \mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{R}_{ff}^{-1} \mathbf{r}_{vv} \quad (9.211)$$

dove \mathbf{R}_{ff} rappresenta la matrice di autocorrelazione del segnale in ingresso al filtro FIR equivalente nella LD, mentre, \mathbf{r}_{vv} rappresenta l'autocorrelazione del segnale vocale (stimata, per esempio, con una crosscorrelazione spaziale). Per la **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, la soluzione ottima, regolarizzata, risulta

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{(\mathbf{R}_{xx} - \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}}{\mathbf{C}^T (\mathbf{R}_{xx} - \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}} \mathbf{R}_{ff}^{-1} \mathbf{r}_{vv}. \quad (9.212)$$

La stima della matrice \mathbf{R}_{ff} e del vettore \mathbf{r}_{vv} possono essere effettuate direttamente dai dati d'ingresso nel dominio del tempo o in quello della frequenza con il metodo descritto in 9.5.2, come indicato da Zelinski in [20].

Il metodo descritto, che può essere interpretato come un mix delle tecniche di post-filtering beamformer (descritte in §9.5.2) e dell'LCMV classico, risulta facilmente estendibile al GSC.

Osservazione

Le tecniche di filtraggio, nell'accezione più generale del termine, consentono l'estrazione dell'informazione immersa in rumore caratterizzato da certa una statistica. La determinazione del filtro, adattativo o statico, può essere guidata: 1) dalla conoscenza a priori delle caratteristiche del rumore in cui si opera o, nel caso questa sia sconosciuta, 2) dalle caratteristiche del segnale da estrarre. Nel caso del beamforming, le metodologie LCMV o GSC operano, prevalentemente, secondo il paradigma 1) e, per definizione, sono quindi ottimali in assenza di riverbero (o *multipath*) e sia presente rumore coerente, per esempio, proveniente da direzioni specifiche. Le prestazioni di tali beamformer in ambienti riverberanti, in cui è presente un elevato campo diffuso senza una specifica direzione di arrivo, come anche riportato in letteratura (vedi, per esempio [20], [33]), sono non troppo diverse dal semplice modello *delay & sum* descritto in precedenza. Al contrario la metodologia detta di post-filtering, descritta nel §9.5.2, essendo basata su una stima dell'autocorrelazione del segnale desiderato, opera con il paradigma della conoscenza della statistica del segnale e risulta più adeguata per operare in presenza di campo diffuso con alto tempo di riverberazione.

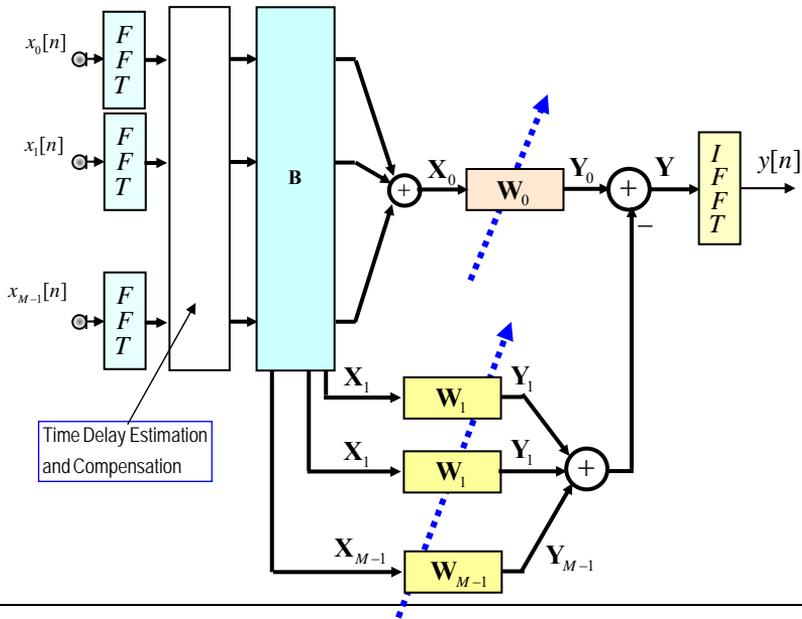


Figura 9.49 Schema del GSC con vincolo adattativo [33].

La metodologia LCMV con vincolo adattativo tenta, in qualche modo, di fondere i due paradigmi di filtraggio con due processi adattativi distinti: il primo operante in modo da cancellare il rumore spazialmente coerente, ovvero proveniente da direzioni specifiche; il secondo, adattativo, seguendo la filosofia del post-filtering, basato sulla stima dell'acf del segnale desiderato, consente la cancellazione del rumore, incorrelato temporalmente al segnale, ma di natura (anche) spazialmente incoerente.

9.6.4.2 *Relative transfer function GSC*

L'ipotesi fondamentale dei BF di Frost e del GSC, è che ogni sensore sia illuminato con una versione ritardata e, al più, attenuata dello stesso segnale. Si fa quindi implicitamente riferimento a un modello di propagazione con una funzione di trasferimento acustica o *Acoustic Transfer Function* (ATF) che dalla (9.19), nel caso di una sola sorgente, per l' m -esimo sensore è approssimata come $A_m = a_m e^{-j\omega\tau_m}$ caratterizzata, quindi, da un ritardo e da un'attenuazione. Nel caso in cui tale ipotesi non fosse rispettata, come in ambiente riverberante, la soppressione di interferenze risulterebbe non ottimale.

Seguendo l'approccio suggerito in [38]-[41], in questo paragrafo, si estende il beamformer di Frost e GSC nel caso in cui i percorsi o *path* non siano semplici ritardi ma ATF complete. In altri termini nel GSC per la parte fissa, che ha il compito di allineare il segnale con il riferimento del rumore, consideriamo piuttosto che un semplice ritardo, una FdT completa tra i sensori.

S. Gannot, D. Burshtein, E. Weinstein, "Signal Enhancement Using Beamforming and Nonstationarity with Applications to Speech", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. SP-49, No. 8, pp. 1614–1626, August 2001.

I. Cohen, S. Gannot and B. Berdugo, "An Integrated Real-Time Beamforming and Postfiltering System for Nonstationary Noise Environments", EURASIP Journal on Applied Signal Processing, Vol. 11, pp. 1064–1073, 2003:

- [1] S. Gannot and I. Cohen, "Speech Enhancement Based on the General Transfer Function GSC and Postfiltering", IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, Vol. 12, No. 6, pp. 561–571, November 2004.
- [2] Y. Avargel and I. Cohen, "System identification in the short time Fourier transform domain with crossband filtering", IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 15, no. 4, pp. 1305–1319, May 2007.

Speech Enhancement With a GSC-Like Structure Employing Eigenvector-Based Transfer Function Ratios Estimation

Krueger, A.; Warsitz, E.; Haeb-Umbach, R.
 Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on
 Volume: 19, Issue: 1
 Digital Object Identifier: 10.1109/TASL.2010.2047324
 Publication Year: 2011, Page(s): 206 - 219

Incorporating the human hearing properties into multichannel speech enhancement

Borowicz, Adam; Petrovsky, Alexandr
 Signal Processing Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications Conference Proceedings (SPA),
 2011

Blind speech separation employing directional statistics in an Expectation Maximization framework

Dang Hai Tran Vu; Haeb-Umbach, R.
 Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2010 IEEE International Conference on
 Digital Object Identifier: 10.1109/ICASSP.2010.5495994
 Publication Year: 2010, Page(s): 241 - 244

On Optimal Frequency-Domain Multichannel Linear Filtering for Noise Reduction

Souden, M.; Benesty, J.; Affes, S.

Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on
Volume: 18 , Issue: 2
Publication Year: 2010 , Page(s): 260 - 276

Multichannel Eigenspace Beamforming in a Reverberant Noisy Environment With Multiple Interfering Speech Signals

Markovich, S.; Gannot, S.; Cohen, I.
Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on
Volume: 17 , Issue: 6
Digital Object Identifier: 10.1109/TASL.2009.2016395
Publication Year: 2009 , Page(s): 1071 - 1086

Convolutional Transfer Function Generalized Sidelobe Canceller

Talmon, R.; Cohen, I.; Gannot, S.
Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on
Volume: 17 , Issue: 7
Digital Object Identifier: 10.1109/TASL.2009.2020891
Publication Year: 2009 , Page(s): 1420 - 1434

Multichannel speech enhancement using convolutional transfer function approximation in reverberant environments

Talmon, R.; Cohen, I.; Gannot, S.
Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009. ICASSP 2009. IEEE International Conference on
Digital Object Identifier: 10.1109/ICASSP.2009.4960476
Publication Year: 2009 , Page(s): 3885 - 3888

Dual-Source Transfer-Function Generalized Sidelobe Canceller

Reuven, G.; Gannot, S.; Cohen, I.
Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on
Volume: 16 , Issue: 4
Publication Year: 2008 , Page(s): 711 - 727

Adaptive signal blocking for generalized sidelobe canceller using matched filter array

Jwu-Sheng Hu; Chia-Hsing Yang
Acoustics, Speech and Signal Processing, 2008. ICASSP 2008. IEEE International Conference on
Publication Year: 2008 , Page(s): 2597 - 2600

Modello e notazione

Per lo sviluppo del metodo consideriamo un array di microfoni posizionato in un ambiente riverberante e supponiamo che il segnale acquisito abbia tre componenti: il segnale vocale non stazionario, un'interferenza transitoria e un'interferenza stazionaria. L'obiettivo del beamformer è la ricostruzione della parte non stazionaria del segnale. Considerando direttamente una rappresentazione a tempo discreto, la non stazionarietà del segnale implica un modello del segnale in uscita dai sensori del tipo

$$x_m[n] = a_m[n] * s[n] + n_m^t[n] + n_m^s[n] \quad \text{per } m = 1, 2, \dots, P \quad (9.213)$$

dove: $a_m[n]$ indica la risposta impulsiva, tempo-variante della ATF $A_{n,m}(e^{j\omega})$, tra la sorgente utile $s[n]$ e l' m -esimo ricevitore; $n_m^t[n]$ e $n_m^s[n]$ indicano rispettivamente le componenti transitorie e a regime del rumore. In forma vettoriale la (9.213) è espressa come

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}[n] * s[n] + \mathbf{n}^t[n] + \mathbf{n}^s[n]. \quad (9.214)$$

Supponiamo una finestra di analisi di durata T tale che, per una ATF lentamente variabile, valga l'approssimazione $A_{n,m}(e^{j\omega}) \rightarrow A_m(e^{j\omega})$ nel dominio della frequenza, con k indice di blocco, con la notazione $\mathbf{W}_k \triangleq \mathbf{W}_k(e^{j\omega})$ e considerando una finestra rettangolare per il k -esimo blocco, è scritta come

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{A}\mathbf{S}_k + \mathbf{N}_k \quad (9.215)$$

dove \mathbf{A} contiene le ATF tra la sorgente e i sensori

$$\mathbf{A} = \left[A_1(e^{j\omega}) \quad A_2(e^{j\omega}) \quad \dots \quad A_p(e^{j\omega}) \right]^T \quad (9.216)$$

vale $\mathbf{N}_k = \mathbf{N}_k^t + \mathbf{N}_k^s$ e dove è implicitamente considerato il prodotto Hadamard per i vettori definiti nel dominio DTFT. Per T sufficientemente grande i termini che compaiono nelle precedenti sono la *Short-Time-Fourier-Transforms* (STFT) dei rispettivi segnali e dove il vettore delle FdT SIMO \mathbf{A} contiene le ATF tempo invarianti dei percorsi.

Il progetto del beamformer può essere fatto con approccio globale di Frost oppure, con l'interpretazione GSC, procedendo separatamente alla determinazione della parte fissa e quella variabile. Nella seconda ipotesi i filtri \mathbf{V}_k , analogamente all'ANC di Widrow, sono adattati in modo da minimizzare la potenza del rumore in uscita.

Approccio TF globale per il BF di Frost

Considerando lo schema di Figura 9.50, il banco \mathbf{W}_k è determinato minimizzando la potenza di Y_k soggetta al vincolo che l'uscita sia pari il segnale desiderato S_k filtrato da un filtro \mathbf{f} con FdT \mathcal{F}_k^* nota a priori. Per cui abbiamo che

$$\begin{aligned} E\{Y_k Y_k^*\} &= E\{\mathbf{W}_k^H \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^H \mathbf{W}_k\} \\ &= \mathbf{W}_k^H \mathbf{R}_{xx,k} \mathbf{W}_k \end{aligned} \quad (9.217)$$

dove $\mathbf{R}_{xx,k} \triangleq E\{\mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^H\}$. Dalla (9.141) nell'algoritmo di Frost viene minimizzata la potenza di uscita soggetta al vincolo

$$\begin{aligned} Y_k &= \mathbf{W}_k^H \mathbf{A}\mathbf{S}_k \\ &= \mathcal{F}_k^* S_k \end{aligned} \quad (9.218)$$

dove con $\mathbf{W}_k^H \mathbf{A} = \mathcal{F}_k^*$ si indica un filtro lineare pre specificato dovuto alla risposta in frequenza desiderata del beamforming lungo la LD. Si osservi che nel modello di Frost il filtro risulta spesso scelto come un semplice ritardo.

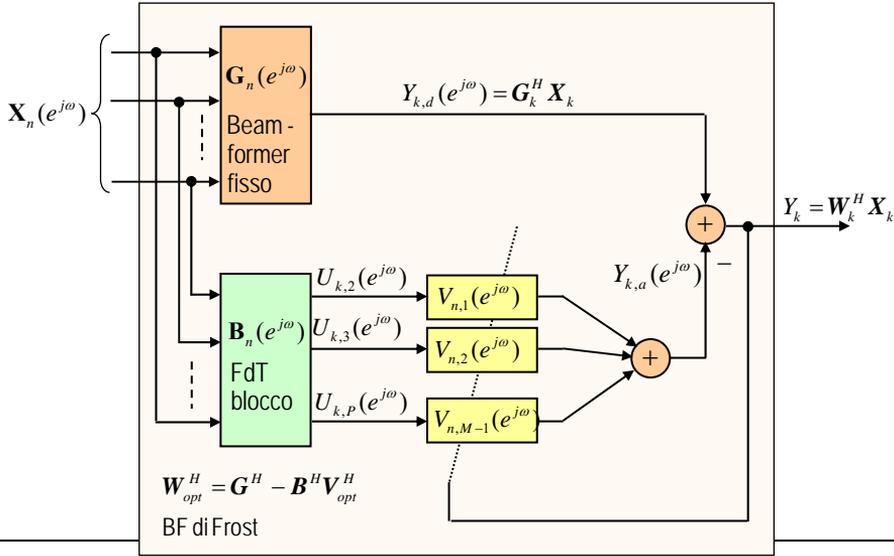


Figura 9.50 Modello del beamformer TF-GSC.

Per la determinazione dei pesi si impone un'uscita pari alla sorgente utile semplicemente ritardata. Analogamente alla (9.142), omettendo per semplicità la scrittura degli indici n e $(e^{j\omega})$, possiamo scrivere

$$\mathbf{W}_{opt} \therefore \arg \min_{\mathbf{W}} \{ \mathbf{W}_k^H \mathbf{R}_{xx,k} \mathbf{W}_k \} \quad \text{s.a.v.} \quad \mathbf{W}_k^H \mathbf{A} = \mathcal{F}_k^* \quad (9.219)$$

La soluzione del problema di ottimizzazione (9.219) può essere eseguita applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Per cui, analogamente alla **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** il filtro ottimo risulta

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{\mathbf{R}_{xx,k}^{-1} \mathbf{A}}{\mathbf{A}^H \mathbf{R}_{xx,k}^{-1} \mathbf{A}} \mathcal{F}_k \quad (9.220)$$

Procedendo come in §9.5.3.2, la soluzione ricorsiva risulta espressa come

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{P}_k \left[\mathbf{W}_k - \mu \mathbf{R}_{xx,k} \mathbf{W}_k \right] + \mathbf{F}_k \quad (9.221)$$

Dove, analogamente alla (9.151) e per analogia vedi anche le (9.46) e (9.47), il *vettore quiescente* \mathbf{F}_k e l'*operatore di proiezione* \mathbf{P} sono definiti rispettivamente come

$$\mathbf{F}_k \triangleq \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|_2^2} \mathcal{F}_k \quad (9.222)$$

$$\mathbf{P}_k \triangleq \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A} \mathbf{A}^H}{\|\mathbf{A}\|_2^2} \quad (9.223)$$

Analogamente alla (9.153), approssimando la correlazione con la sua stima istantanea, $\mathbf{R}_{k,xx} \sim \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^H$ l'algoritmo adattativo (di tipo LMS) risulta essere

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{P}_k \left[\mathbf{W}_k - \mu \mathbf{X}_k Y_k^* \right] + \mathbf{F}_k. \quad (9.224)$$

Sommario algoritmo di Frost nel dominio della frequenza

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^H / \|\mathbf{A}\|_2^2$$

for $n = 0, 1 \dots \{$

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{P}_k \left[\mathbf{W}_k - \mu \mathbf{X}_k Y_k^* \right] + \mathbf{F}_k$$

$$\mathbf{F}_k = \left(\mathbf{A} / \|\mathbf{A}\|_2^2 \right) \mathcal{F}_k$$

$\}$

Interpretazione geometrica e approccio TF-GSC

Per la determinazione delle proprietà del TF-GSC procediamo in modo analogo al GSC. Con riferimento alla Figura 9.51, consideriamo lo spazio nullo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, l'iperpiano di vincolo $\Lambda(e^{j\omega})$ e lo spazio immagine $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ della matrice \mathbf{A} rispettivamente come

$$\Sigma(e^{j\omega}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}) \triangleq \{ \mathbf{W} : \mathbf{A}^H \mathbf{W} = \mathbf{0} \} \quad (9.225)$$

$$\Lambda(e^{j\omega}) \triangleq \{ \mathbf{W} : \mathbf{A}^H \mathbf{W} = \mathcal{F} \} \quad (9.226)$$

$$\Psi(e^{j\omega}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}) \triangleq \{ \kappa \mathbf{A}, \forall \kappa \in \mathbb{R} \}. \quad (9.227)$$

Dalle precedenti definizioni vale che (Cfr. §9.5.3.4) $\mathbf{F}_k \perp \Lambda(e^{j\omega})$ per cui $\mathbf{F}_k \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$. Per la (9.222) risulta, inoltre, che

$$\mathbf{A}^H \mathbf{F}_k = \frac{\mathbf{A}^H \mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|_2^2} \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k. \quad (9.228)$$

La matrice $\mathbf{P}_k(e^{j\omega})$ definita in (9.223) è la proiezione sullo spazio nullo $\mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$.

Osservazione

Procedendo come in §9.6.2.2, il vettore \mathbf{W}_k può essere univocamente considerato come la somma di due vettori, definiti rispettivamente nei sottospazi ortogonali $\Psi(e^{j\omega})$ e $\Sigma(e^{j\omega})$, per cui vale

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{G}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{V}_k \quad (9.229)$$

dove la matrice \mathbf{B}_k rappresenta la matrice di blocco che dovrà, analogamente alla (9.184), essere definita in modo tale che le sue colonne mappino lo spazio nullo $\Sigma(e^{j\omega})$, ovvero

$$\mathbf{B}_k^H \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (9.230)$$

e dove il vettore \mathbf{V}_k , nella (9.229), rappresenta un banco di $(P-1)$ filtri adattativi. Dalla interpretazione geometrica del beamformer di Frost e GSC, vedi Figura 9.51, risulta che il vettore $\mathbf{G}_k \in \Psi(e^{j\omega})$; per cui vale

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{F}_k = \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|_2} \mathcal{F}_n. \quad (9.231)$$

Per l'uscita del GSC risulta che (vedi Figura 9.50)

$$Y_k = Y_{k,d} - Y_{k,a} \quad (9.232)$$

dove

$$\begin{aligned} Y_{k,d}(e^{j\omega}) &= \mathbf{G}_k^H \mathbf{X}_k \\ Y_{k,a}(e^{j\omega}) &= \mathbf{V}^H \mathbf{B}^H \mathbf{X}_k. \end{aligned} \quad (9.233)$$

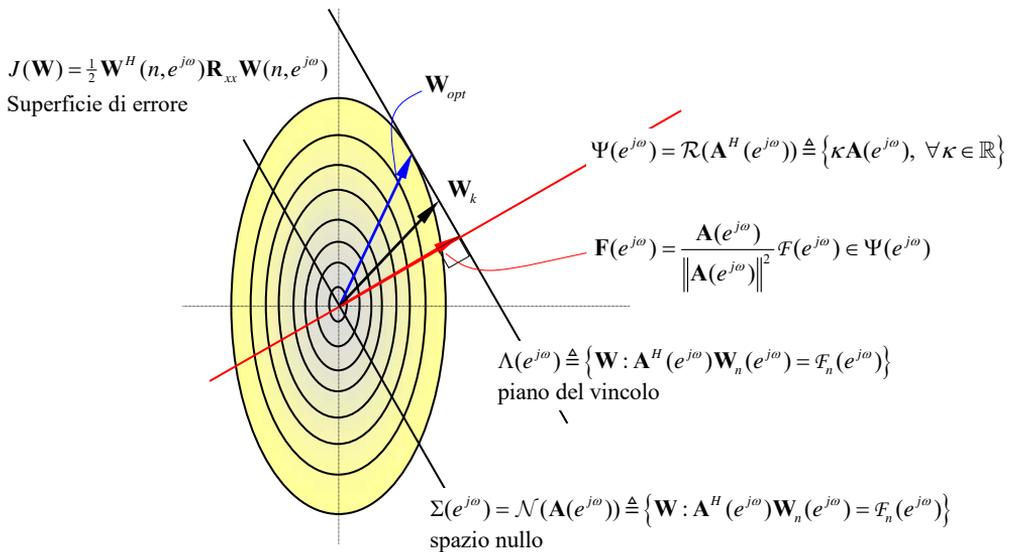


Figura 9.51 Rappresentazione del problema di ottimizzazione vincolato. Anche nel dominio della frequenza la soluzione ottima consiste nel vettore con vertice nel punto di tangenza del piano di vincolo con il contorno della superficie di errore.

Considerando il secondo termine della precedente, per la (9.230) osserviamo che risulta

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_k &= \mathbf{B}_k^H \mathbf{X}_k \\
 &= \mathbf{B}_k^H [\mathbf{A}S_k + \mathbf{N}_k] \\
 &= \mathbf{B}_k^H \mathbf{N}_k
 \end{aligned} \tag{9.234}$$

per cui è verificato che il segnale \mathbf{U}_k rappresenta solo contributo di rumore presente in ingresso. Ovvero, il termine di rumore presente in uscita al beamformer fisso $Y_{k,d}$ può essere ridotto adattando il banco di filtri adattativi \mathbf{V}_k , per esempio, usando il criterio di minimizzazione della potenza in uscita. In altri termini, \mathbf{U}_k rappresenta il *rumore di riferimento* di un cancellatore adattativo di rumore di Widrow multicanale.

Matrice di blocco \mathbf{B}_k

Una possibile forma della matrice di blocco \mathbf{B}_k può essere effettuata considerando l'espressione (9.230) ed esplicitandone il prodotto come

$$\mathbf{B}_k^H \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{A_2(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{A_3(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{A_P(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(e^{j\omega}) \\ A_2(e^{j\omega}) \\ \vdots \\ A_P(e^{j\omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9.235}$$

In altri termini, la matrice di blocco \mathbf{B}_k , che ha il compito di eliminare il segnale utile e fornire in uscita il solo segnale di rumore, risulta definita come

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} -\frac{A_2(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})} & -\frac{A_3(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})} & \cdots & -\frac{A_P(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{P \times (P-1)}. \tag{9.236}$$

Si osservi che le FdT acustiche $A_m(e^{j\omega})$ sono in genere sconosciute e perciò per la (9.236) possiamo limitarci ad effettuare una più semplice stima dei rapporti

$$H_m(e^{j\omega}) = \frac{A_m(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})}, \quad \text{per } m = 2, \dots, P \tag{9.237}$$

per cui definiamo il vettore \mathbf{H}_k come rapporto tra le ATF (9.237) o *Transfer Function Ratio* (TFR) dette anche *Relative Acoustic Transfer Function* (RATF) come

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_k &\triangleq \frac{\mathbf{A}}{A_1(e^{j\omega})} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & H_2(e^{j\omega}) & \cdots & H_P(e^{j\omega}) \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{A_1(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})} & \cdots & \frac{A_P(e^{j\omega})}{A_1(e^{j\omega})} \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{9.238}$$

Dalla (9.234) per le componenti di uscita $U_{n,m}(e^{j\omega})$ risulta che

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_k &= \mathbf{B}_k^H \mathbf{X}_k \\
 &= \begin{bmatrix} -H_2(e^{j\omega}) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -H_3(e^{j\omega}) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -H_P(e^{j\omega}) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(P-1) \times P} \begin{bmatrix} X_{k,1}(e^{j\omega}) \\ X_{k,2}(e^{j\omega}) \\ \vdots \\ X_{k,P}(e^{j\omega}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{9.239}$$

o, in forma scalare,

$$U_{k,m}(e^{j\omega}) = X_{k,m}(e^{j\omega}) - H_{k,m}(e^{j\omega})X_{k,1}(e^{j\omega}) \quad \text{per } m = 2, 3, \dots, P \tag{9.240}$$

per cui è dimostrato che per l'implementazione della matrice di blocco del *sidelobe-canceller* non è necessario conoscere le FdT acustiche $A_m(e^{j\omega})$ ma è sufficiente la conoscenza delle stime dei rapporti $H_m(e^{j\omega}) = A_m(e^{j\omega})/A_1(e^{j\omega})$.

Filtro \mathbf{G}_k

Dalla definizione (9.238) risulta che per la (9.231) vale

$$\mathbf{G}_k \triangleq \frac{\mathbf{H}_k}{\|\mathbf{H}_k\|_2^2} \mathcal{F}_k. \tag{9.241}$$

La precedente determina l'espressione della parte fissa del TF-GSC. In altri termini la parte del BF può essere vista come un *matched filter beamformer* (MFB) definito come

$$\mathbf{G}_k = \frac{\mathcal{F}_k}{\|\mathbf{H}_k\|_2^2} \begin{bmatrix} 1 & H_2(e^{j\omega}) & \cdots & H_P(e^{j\omega}) \end{bmatrix}^T. \tag{9.242}$$

Osservazione

La \mathbf{G}_k può essere interpretata come un *matched filter*. Combinando le (9.215), (9.231) e la (9.233), per l'uscita della parte fissa risulta

$$\begin{aligned}
 Y_{k,d} &= \mathbf{G}_k^H (\mathbf{A}S_k + \mathbf{N}_k) \\
 &= \mathcal{F}_k^* S_k + \frac{\mathcal{F}_k^*}{\|\mathbf{A}\|_2^2} \mathbf{A}^H \mathbf{N}_k
 \end{aligned} \tag{9.243}$$

dove il termine $F_k^* S_k$ rappresenta il segnale utile. Si noti che ponendo $F_k^* = e^{-j\omega\tau}$ (semplici ritardi), come nel beamformer tradizionale, $Y_{k,d}(e^{j\omega})$ rappresenta semplicemente una versione ritarda del segnale d'ingresso.

Adattamento TF-GSC

Con riferimento alla Figura 9.50, il TF-GSC è costituito da tre componenti:

- il beamformer fisso (FBF) G_k ;
- la matrice di blocco implementata dalla FdT MIMO B_k che blocca il segnale lungo la LD e definisce il rumore di riferimento;
- un cancellatore di rumore multicanale V_k .

Dalle (9.232) e (9.233), l'uscita complessiva del BF è espressa come

$$\begin{aligned} Y_n(e^{j\omega}) &= \mathbf{W}_n^H \mathbf{X}_n \\ &= [\mathbf{G}_n^H - \mathbf{V}_n^H \mathbf{B}^H] \mathbf{X}_n \end{aligned} \quad (9.244)$$

in cui $\mathbf{W}_n^H = \mathbf{G}_n^H - \mathbf{V}_n^H \mathbf{B}^H$ e dove il banco dell'MNC \mathbf{V}_n è definito come

$$\mathbf{V}_n = [V_{n,2}(e^{j\omega}) \quad V_{n,3}(e^{j\omega}) \quad \dots \quad V_{n,P}(e^{j\omega})]^T. \quad (9.245)$$

La soluzione del problema non vincolato, proposta in [38], può essere ottenuta minimizzando l'energia di uscita come

$$\mathbf{V}_{opt} \therefore \arg \min_{\mathbf{V}} E \left\{ \left\| Y_{n,d}(e^{j\omega}) - \mathbf{V}_n^H \mathbf{U}_n \right\|_2^2 \right\}. \quad (9.246)$$

Definendo le correlazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n,UY} &\triangleq E \{ \mathbf{U}_n Y_{n,d}^* \} \\ \mathbf{R}_{n,UU} &\triangleq E \{ \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \} \end{aligned} \quad (9.247)$$

la soluzione multicanale ottima di Wiener risulta essere

$$\mathbf{V}_{opt} = \mathbf{R}_{n,UU}^{-1} \mathbf{R}_{n,UY}. \quad (9.248)$$

Considerando le approssimazioni istantanee delle correlazioni (Cfr. §5.3.5.4) $\mathbf{R}_{n,UY} \sim \mathbf{U}_n Y_{n,d}^*$ e $\mathbf{R}_{n,UU} \sim \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ è possibile definire una legge di adattamento ricorsiva. Una soluzione di tipo NLMS nel dominio della frequenza risulta infatti

$$V_{n+1,m}(e^{j\omega}) = V_{n,m}(e^{j\omega}) + \frac{\mu}{P_{n,m}(e^{j\omega})} U_{n,m}(e^{j\omega}) Y_n^*(e^{j\omega}) \quad \text{per } m = 2, 3, \dots, P \quad (9.249)$$

Dove il termine di normalizzazione $P_{n,m}(e^{j\omega})$, diverso per ogni filtro del banco e funzione della frequenza, dipende dalla potenza del segnale $U_n(e^{j\omega})$ o del segnale esterno $X_n(e^{j\omega})$ con una legge del tipo

$$P_{n,m}(e^{j\omega}) = \alpha P_{n-1,m}(e^{j\omega}) + (1 - \alpha) \sum_m |Z_{n,m}(e^{j\omega})|^2 \quad \text{per } m = 2, 3, \dots, P \quad (9.250)$$

dove α è un parametro di smussamento e il segnale $Z_{n,m}(e^{j\omega})$ è scelto pari all'ingresso $X_{n,m}(e^{j\omega})$ o pari al segnale di rumore.

Stima delle funzioni di trasferimento acustiche relative

La stima on-line delle RATF tra due (o più) ingressi, è basata sull'ipotesi di non stazionarietà del segnale desiderato. Per l'applicazione del metodo la finestra di analisi è suddivisa in sotto blocchi di lunghezza tale che il segnale desiderato possa considerarsi stazionario. Tale ipotesi è sempre verificabile quando in ingresso il segnale è di tipo vocale e $A_m(e^{j\omega})$ è considerato fisso nell'intervallo di analisi.

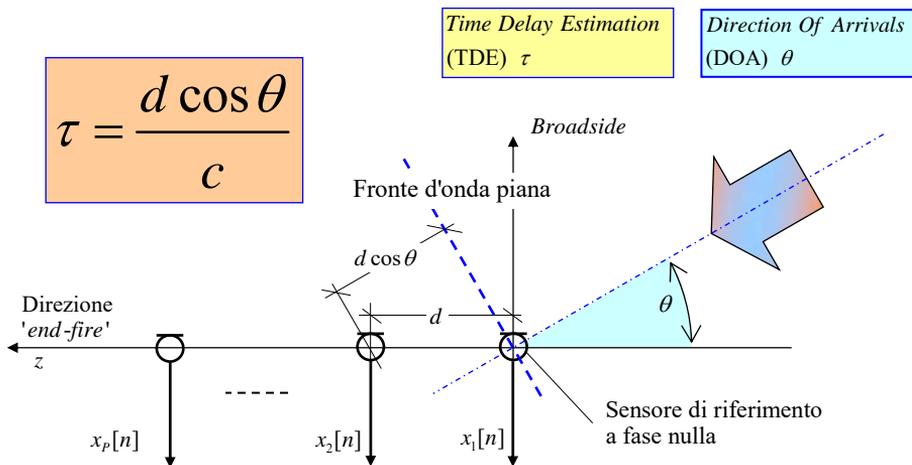
La procedura d'identificazione è piuttosto complessa ed esula dagli scopi del pre-sente volume per cui si rimanda alla letteratura specializzata sull'argomento [42], [43].

9.7 Stima della direzione di arrivo e del tempo di ritardo

Per una schiera di sensori la stima della direzione d'arrivo o del suo problema duale, il tempo di ritardo o

- *Direction Of Arrivals (DOA)*
- *Time Delay Estimation (TDE)*

riveste interesse centrale in numerose applicazioni dell'AP.



Nella stima del DOA occorre distinguere i casi:

- banda stretta,
- banda larga
- metodi spettrali non parametrici
- parametrici.

Analogamente, per la TDE occorre distinguere i casi:

- propagazione è di tipo anecoico
- riverberante.

9.7.1 DOA a banda stretta

Le applicazioni riguardano i

- radar,
- telecomunicazioni,
- acustica sottomarina
- ..

Le prime tecniche proposte sono

Beamforming convenzionale

Metodi classici di stima spettrale. Risoluzione limitata dalla geometria dell'array.

Maximum-Likelihood (ML)

Onde con angoli di arrivo vicini e basso SNR approcci parametrici e/o basati sulla stima di massima verosimiglianza o *Maximum-Likelihood* (ML) (Cfr. §1.3.2.2) presentano una maggiore risoluzione.

Nei metodi **ML stocastici** i segnali sono assunti Gaussiani mentre sono considerati arbitrari nel caso di **ML deterministico**. Il rumore è considerato stocastico in entrambi i metodi.

Nel caso di ML stocastico, nelle condizioni ideali, è possibile raggiungere il limite di Cramer-Rao o CRB a scapito, però, di un'elevata complessità computazionale necessaria per risolvere un complesso problema di ottimizzazione multi dimensionale non lineare che, inoltre, non garantisce la convergenza globale.

Approcci detti a super-risoluzione,

basati sulla decomposizione in sottospazi di segnale e di rumore della matrice di correlazione d'ingresso \mathbf{R}_{xx} , garantiscono migliori prestazioni e una elevata efficienza computazionale rispetto ai metodi ML.

9.7.1.1 DOA con beamformer convenzionale: metodo *Steered Response Power* (SRP)

Nel caso di segnali a banda stretta la direzione di arrivo DOA è, in genere, effettuata attraverso una **scansione del campo visivo**, o *Field-Of-View* (FOV),

In termini pratici:

valutazione della potenza di uscita della schiera per vari angoli di steering,

per cui il metodo è indicato come *Steered Response Power* (SRP). Nel caso a banda stretta, considerando il ricevitore isotropico, la definizione del manifold risulta

$$\mathcal{M} \triangleq \{\mathbf{a}(\theta), \theta \in \Theta\} \quad (9.251)$$

Dalla scansione del FOV, $\Theta \equiv [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, la stima della direzione è relativa agli angoli in cui si ha la massima potenza in uscita del BF.

Per lo sviluppo analitico,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n] &= \sum_{k=1}^{N_s} \mathbf{a}_k(\theta) s_k[n] + \mathbf{n}[n] \\ &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}[n] + \mathbf{n}[n]. \end{aligned} \quad N_s < P \quad (9.252)$$

$\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{(P \times N_s)} = [\mathbf{a}_1(\theta) \quad \mathbf{a}_2(\theta) \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{N_s}(\theta)]$ la matrice di steering

$y[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{x}$,

uscita del BF

$P(\theta) = E\{|y[n]|^2\}_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{opt}}$, per $\theta \in \Theta$; ovvero

$$\begin{aligned} P(\theta) &= E\{|y[n]|^2\}_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{opt}} \\ &= \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_{opt} \end{aligned} \quad \theta \in \Theta \quad (9.253)$$

calcolata per $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ con opportuna risoluzione angolare, può essere considerata come uno spettro in cui invece della frequenza, viene considerato l'angolo DOA.

In pratica la (9.253) è valutata per θ variabile all'interno del FOV e i suoi massimi determinano le direzioni di arrivo.

Nel caso di BF convenzionale DSBF e rumore isotropico Gaussiano il beamformer ottimo risulta pari a (Cfr. §9.5.1)

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)} \quad (9.254)$$

per cui detto $\alpha = (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-2}$, sostituendo nella (9.253) risulta

$$P_{DSBF}(\theta) = \alpha \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{a}(\theta) \quad \theta \in \Theta \quad (9.255)$$

che rappresenta un *spettro spaziale*.

9.7.1.2 DOA con beamformer di Capon

Nel metodo di Capon standard (Cfr. §9.5.1.1) il vettore ottimo è pari a

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}.$$

Sostituendo quest'ultima nella (9.253), il DOA può essere fatto definendo la seguente quantità

$$\begin{aligned} P_{CAPON}(\theta) &= \frac{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{[\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)]^2} \\ &= \frac{1}{\mathbf{a}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}} \end{aligned} \quad \theta \in \Theta \quad (9.256)$$

La stima DOA con la (9.256), presenta una risoluzione che non è in grado di risolvere più segnali provenienti da angolazioni piuttosto vicine. I picchi della (9.256), infatti, rappresentano la potenza del segnale incidente solo in modo approssimato. Il metodo ha un grado di robustezza tipico dei metodi di analisi spettrale non parametrica e non richiede alcuna modellazione del segnale a rango ridotto.

9.7.1.3 DOA con analisi di sottospazio

La direzione di arrivo può essere determinata dalla proprietà dei sottospazi della matrice di covarianza del segnale d'ingresso

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$$

Per una stima consistente delle componenti del segnale e del rumore è possibile, infatti, effettuare l'analisi degli auto-valori/vettori della matrice di covarianza spaziale definita in (9.38)

Nei metodi a rango ridotto è considerato il solo sottospazio di segnale ed è scartato il contributo dovuto al rumore (supposto Gaussiano e incorrelato).

Algoritmo Multiple Signal Classification (MUSIC)

Per un array di P elementi irradiato da N_s sorgenti, con $N_s < P$, l'espressione della correlazione (9.38), risulta,

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{nn} \quad (9.257)$$

dove per rumore Gaussiano bianco, vale $\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$. Posto $\mathbf{\Lambda}_n \equiv \mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$, procedendo alla fattorizzazione spettrale della matrice di covarianza spaziale (Cfr. §9.3.1.2), dalla (9.45), abbiamo che

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \quad (9.258)$$

dove \mathbf{U}_s e \mathbf{U}_n sono matrici unitarie e $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]$ la matrice diagonale con autovalori di \mathbf{R}_{xx} reali ordinati come $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$. Supponendo nota la varianza del rumore σ_n^2 , è possibile partizionare gli autovettori e autovalori appartenenti al segnale e al rumore nella seguente modalità

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_s} \geq \sigma_n^2 \quad \text{spazio del segnale}$$

e appartenenti al rumore

$$\lambda_{N_s+1}, \lambda_{N_s+2}, \dots, \lambda_p = \sigma_n^2 \quad \text{spazio del rumore.}$$

Nell'ipotesi di rumore Gaussiano e indipendente tra i sensori risulta che gli autovettori del sottospazio di rumore sono ortogonali allo spazio colonna della matrice di steering, ovvero $\mathbf{U}_n^H \mathbf{A} = \mathbf{0}$. In altri termini possiamo scrivere

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta_i) = 0 \quad \text{per} \quad \theta_i = [\theta_1, \dots, \theta_{N_s}]. \quad (9.259)$$

Dalla precedente proprietà l'algoritmo di stima denominato *Multiple Signal Classification* (MUSIC) [47], [49], può essere derivato definendo *spettro spaziale MUSIC* $P_{MUSIC}(\theta)$ la seguente quantità

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta)} \quad (9.260)$$

dove il numero di sorgenti N_s deve essere noto o stimato. Si osservi che $P_{MUSIC}(\theta)$ non rappresenta una vera e propria potenza, la (9.260), infatti, rappresenta la distanza tra due sottospazi, ed è perciò definito come *pseudo spettro*. La quantità $P_{MUSIC}(\theta)$ rappresenta una stima dello pseudo spettro del segnale d'ingresso $\mathbf{x}[n]$ calcolato attraverso una stima degli autovettori della matrice di correlazione \mathbf{R}_{xx} .

Il costo computazionale del metodo MUSIC può risultare elevato nel caso di scansione a grana fine del FOV. Inoltre, la metodologia MUSIC è stata ed è un argomento di ricerca molto fertile e in letteratura sono disponibili numerose varianti e specializzazioni del metodo.

Esempio

Per una più chiara percezione delle prestazioni ottenibili, consideriamo un ULA con $P = 10$ sensori isotropici spaziatati con distanza $d = \lambda_s/2$. Consideriamo la presenza di tre sorgenti irradianti della stessa potenza, con frequenza spaziale $f_s = 0.1, 0.15$ e 0.4 ; definita come

$$f_s = \frac{d}{\lambda_s} \cos(\theta). \quad (9.261)$$

La lunghezza della sequenza di analisi è pari a $N = 100, 10000$ campioni, in presenza rumore additivo Gaussiano (complesso) con varianza unitaria, con $\text{SNR} = 100, 10, 0$ e -10 [dB]. Con riferimento alla Figura 9.52, la stima del DOA è eseguita mettendo a confronto i risultati ottenuti con la tecnica convenzionale, indicata come P_{DSBF} (eqn. (9.255)), il metodo standard di Capon (eqn. (9.256)) e il metodo MUSIC (eqn. (9.260)). I dati sull'SNR e sulla lunghezza della sequenza sono riportati direttamente in figura.

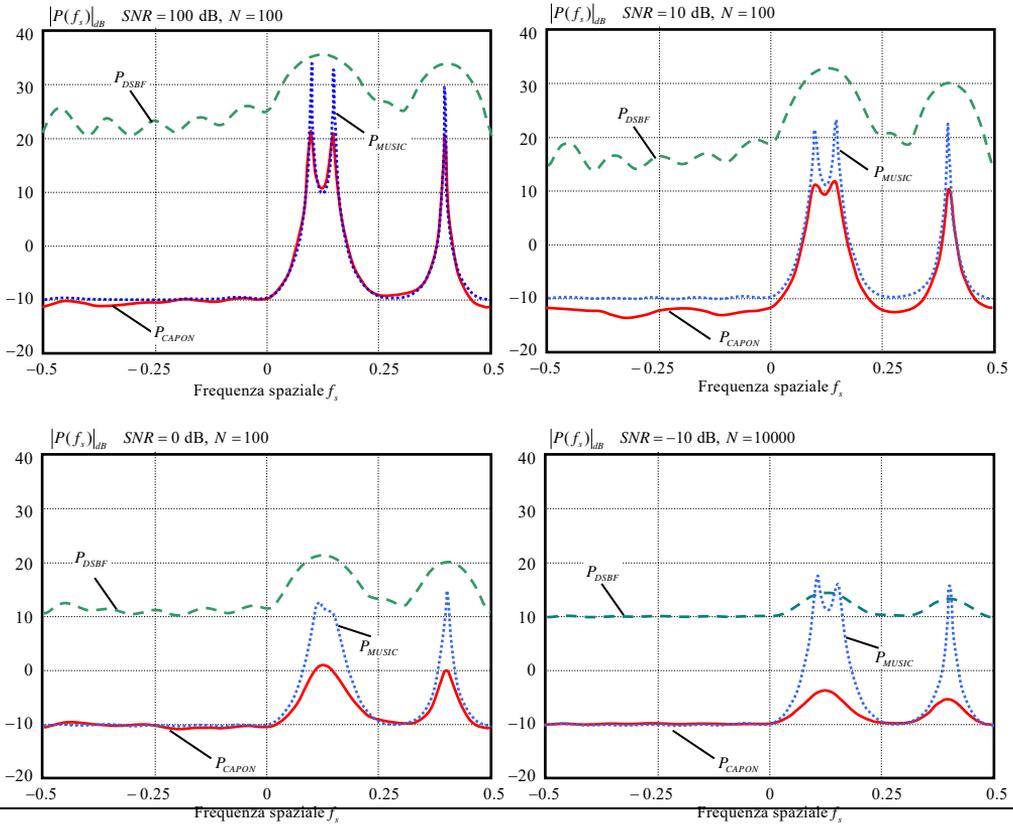


Figura 9.52 Stima della direzione di arrivo con i metodo DOA convenzionale, Capon e MUSIC per un ULA con $P = 10$ sensori isotropici spazati con distanza $d = \lambda_s / 2$. La lunghezza della sequenze del segnale e l'SNR sono riportate direttamente in figura.

9.7.1.4 DOA con metodi parametrici

Le tecniche DOA non parametriche sono basate sulla scansione del campo visivo e, pur essendo attrattive dal punto di vista computazionale, a volte non consentono una sufficiente accuratezza di stima.

In scenari particolari in cui, per esempio, sono presenti segnali correlati o coerenti, le tecniche spettrali possono risultare poco adatte.

Come nelle metodologie di analisi spettrale (Cfr. §1.3.3.4 e Cfr. §8.2.4), metodi parametrici basati sulla stima del modello di generazione del segnale, possono risultare più efficienti e robusti.

Root MUSIC

Nel caso di ULA, una variante del MUSIC nota come, *root MUSIC*, ha la forma

$$P_{rMUSIC}(z) = \mathbf{a}(z)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(1/z) = 0 \quad (9.262)$$

dove

$$\mathbf{a}(z) = [1 \quad z \quad \dots \quad z^{P-1}]^T \quad (9.263)$$

con $z = e^{j(2\pi/\lambda_s)d \sin \theta}$ e dove λ_s è la lunghezza d'onda della s -esima sorgente.

La direzione di arrivo è stimata dalle radici del polinomio (9.263), disponibili in coppie complesse coniugate, prossime al cerchio unitario.

Quelle più interne sono relative al rumore. Per bassi SNR il root MUSIC presenta prestazioni migliori rispetto al MUSIC.

Algoritmo ESPRIT

L'algoritmo ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique*), rappresenta uno dei più efficienti e robusti metodi per il DOA a banda stretta. Proposto da Paulraj, Roy e Kailath [50], [51], è un metodo *algebrico* che non richiede nessuna procedura di ricerca. L'idea di base del metodo è quella di sfruttare le proprietà di invarianza rotazionale sottostante il sottospazio del segnale attraverso l'invarianza rispetto la traslazione dell'array.

Consideriamo un ULA con una matrice di steering per N_s sorgenti incidenti definita come

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{j\Omega_1} & e^{j\Omega_2} & \dots & e^{j\Omega_{N_s}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\Omega_1(P-1)} & e^{j\Omega_2(P-1)} & \dots & e^{j\Omega_{N_s}(P-1)} \end{bmatrix} \quad (9.264)$$

con $\Omega_i = (2\pi/\lambda)d \cos \theta_i$.

L'algoritmo usa la struttura della matrice di steering in modalità differente rispetto agli altri metodi.

Dapprima osserviamo che la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{P \times N_s}$, definita in (9.264), ha una struttura ciclica (*shift structure*); definiamo, poi, due matrici $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}^{(P-1) \times N_s}$, $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{A}_2 = [\mathbf{A}]$, cancellando la prima e l'ultima riga di \mathbf{A} , tali che

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \text{ultima riga} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{prima riga} \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (9.265)$$

e, inoltre, vale la seguente relazione

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{\Phi} \quad (9.266)$$

dove $\mathbf{\Phi}$ è una matrice diagonale definita come $\mathbf{\Phi} = \text{diag}[e^{j\Omega_1} \quad e^{j\Omega_2} \quad \dots \quad e^{j\Omega_{N_s}}]_{N_s \times N_s}$. In modo analogo definiamo due matrici formate con gli autovettori della matrice di segnale \mathbf{U}_s tali che $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{U}_s] \in \mathbb{C}^{(P-1) \times P}$ e $\mathbf{U}_2 = [\mathbf{U}_s] \in \mathbb{C}^{(P-1) \times P}$. Ricordando che \mathbf{U}_s e \mathbf{A} sono relative allo stesso span (o spazio colonna), esiste una matrice a rango pieno \mathbf{T} tale che

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (9.267)$$

per cui vale anche

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{T} \\ \mathbf{U}_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{T} = \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (9.268)$$

Combinando con la (9.266) otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2 &= \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{T} \\ \mathbf{U}_1 &= \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T} \end{aligned} \quad (9.269)$$

per cui, definendo la matrice $\Psi = \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T}$, possiamo scrivere

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 \Psi \quad (9.270)$$

dove, si osservi che, le matrici \mathbf{T} e Φ sono entrambe incognite.

Dalla (9.270) la matrice Ψ può essere determinata con il metodo LS o TLS, per cui possiamo scrivere

$$\Psi = (\mathbf{U}_2^H \mathbf{U}_2)^{-1} \mathbf{U}_2^H \mathbf{U}_1 \quad \text{o} \quad \Psi = \mathbf{U}_1^H (\mathbf{U}_1^H \mathbf{U}_1)^{-1} \mathbf{U}_2 \quad (9.271)$$

Dalla (9.270) risulta che gli elementi diagonali di Φ coincidono con gli autovalori di Ψ , ovvero sono assimilabili a trasformazioni di similarità caratterizzate dagli stessi autovalori.

L'algoritmo ESPRIT può essere formalizzato dai seguenti passi:

1. **decomposizione della matrice di covarianza \mathbf{R}_{xx} e determinazione del sottospazio di segnale \mathbf{U}_s ;**
2. **formazioni delle matrici \mathbf{U}_1 e \mathbf{U}_2 ;**
3. **calcolo della $\Psi = \mathbf{U}_1^H (\mathbf{U}_1^H \mathbf{U}_1)^{-1} \mathbf{U}_2$;**
4. **autovalori di Ψ , ψ_n , $n = 1, 2, \dots, N_s$ e determinazione della stima DOA dagli angoli ψ_n .**

Osservazione

Il costo computazionale dell'ESPRIT è più basso rispetto ad altre tecniche parametri-che come il root MUSIC e, come quest'ultima, e non prevede una scansione o ricerca nel campo di vista dell'array.

La matrice Ψ può essere determinata con una delle metodologie descritte nel Cap. 4, come la TLS o altre tecniche.

9.7.2 Metodi DOA a banda larga

Nel caso a larga banda ogni sorgente non corrisponde più a una matrice di covarianza a rango pieno e i metodi parametri a sottospazio richiedono, comunque, una analisi a rango ridotto. L'estensione dei metodi a banda stretta (parametrici e non) per segnali a larga banda può, allora, essere fatta come usuale nei BF descritti nei precedenti paragrafi, sostituendo ai pesi complessi (*phase shift*) delle linee di ritardo. Come in precedenza sviluppato, per l'uscita del FSBF (*filter-&-sum beamformer*) vale sempre la relazione $y[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{x}$, per cui la direzione di arrivo può essere stimata dalla massima potenza di uscita in funzione dell'angolo. Per esempio, nel dominio della frequenza, indicando con $W_p(e^{j\omega})$ le FdT dei filtri a valle dei sensori, considerando un FSBF con P ingressi e uno di *steering delay* pari a n_{τ_p} , vale la relazione

$$Y(\theta, e^{j\omega}) = \sum_{p=1}^P W_p(e^{j\omega}) X_p(e^{j\omega}) e^{j\omega\tau_p} \quad \text{per } \theta \in \Theta \quad (9.272)$$

dove τ_p è uno *steering delay* appropriato per focalizzare l'array nella direzione spaziale della sorgente θ_s . Per cui, considerando la DTFT, la potenza $P(\theta)$ in uscita risulta pari a

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(\theta, e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \text{DTFT}^{-1} \{ |Y(\theta, e^{j\omega})|^2 \} \end{aligned} \quad (9.273)$$

con il metodo *steered response power* (SRP), la stima della DOA θ_s pari a

$$\hat{\theta}_s = \arg \max_{\theta \in \Theta} \{ P(\theta) \}. \quad (9.274)$$

9.7.3 Metodi di stima del tempo di ritardo

La stima del tempo di ritardo o TDE consiste nella stima del tempo di propagazione di un'onda che irradia due o più ricevitori [45]. La TDE è una problematica intimamente connessa alla stima DOA; considerando, per esempio, un ULA (vedi Figura 9.7) nota la posizione dei sensori attraverso la TDE è possibile calcolare l'angolo di arrivo: dalla (9.23) noti τ e c risulta $\theta = \cos^{-1}(\tau c/d)$.

La TDE risulta essere piuttosto complicata in presenza bassi SNR e/o in ambienti di propagazione complessi di tipo multipath o, nel caso acustico, riverberante.

9.7.3.1 Metodo della crosscorrelazione

Come illustrato già nel Cap. 3 (Cfr. §3.4.3), la TDE è riconducibile a un semplice problema d'identificazione. Consideriamo una sorgente $s[n]$ che irradia due sensori posti a una distanza d , il segnale ricevuto risulta

$$\begin{aligned} x_1[n] &= s[n] + n_1[n] \\ x_2[n] &= \alpha s[n + D] + n_2[n] \end{aligned} \quad (9.275)$$

con D (*Delay*) rappresenta il ritardo di arrivo, α l'attenuazione e $n_1[n]$, $n_2[n]$ il rumore di misura supposto incorrelato con $s[n]$. Una semplice modalità per la stima del ritardo D consiste nell'analisi della funzione di crosscorrelazione (ccf)

$$r_{x_1 x_2}[k] = E \{ x_1[n] x_2[n - k] \} \quad (9.276)$$

in questo caso, detta $\hat{r}_{x_1 x_2}[n]$ la stima della ccf calcolata come media temporale di lunghezza N ,

la stima del ritardo D risulta pari a

$$\hat{D} = \arg \max_{n \in [0, N-1]} \{ \hat{r}_{x_1 x_2}[n] \}. \quad (9.277)$$

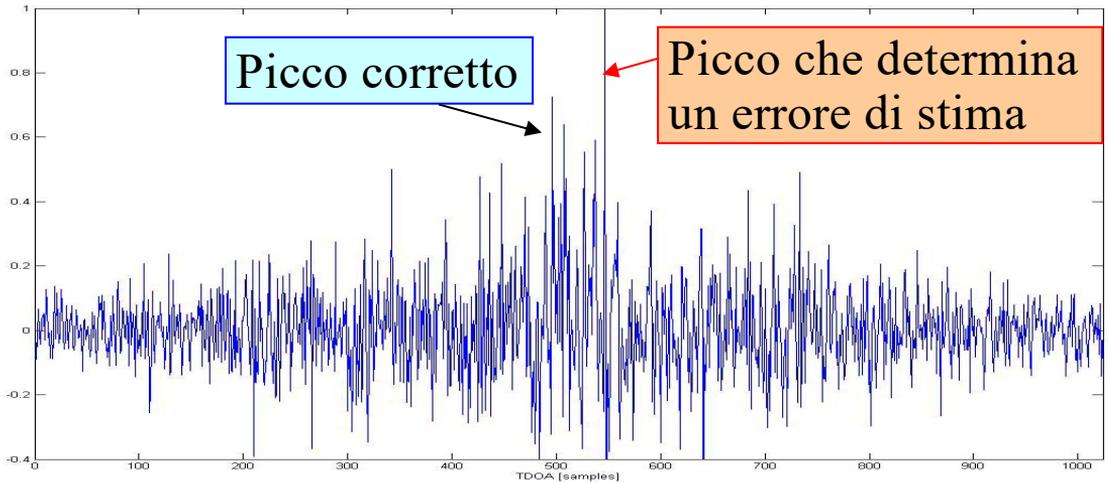
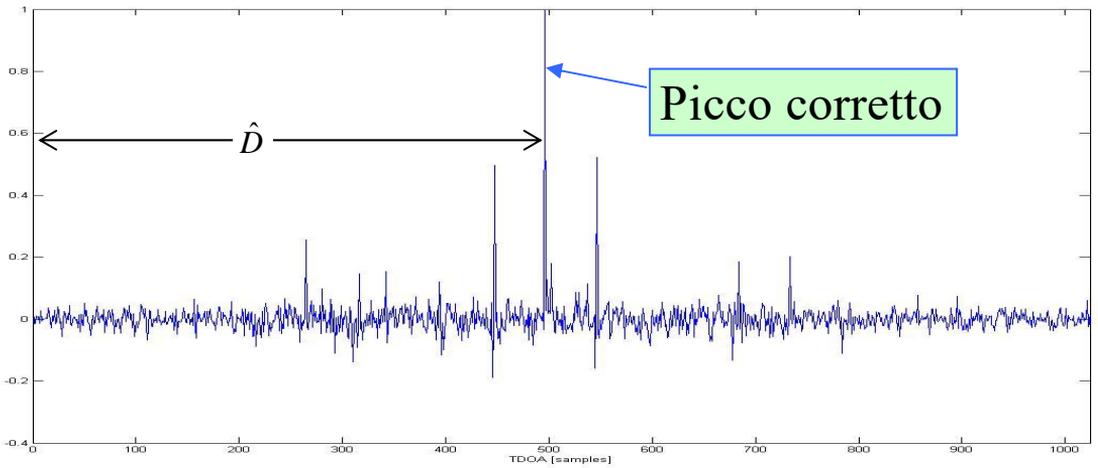
Osservazione

Considerando il modello del segnale (9.275) e in condizioni ideali di rumore Gaussiano, la crosscorrelazione tra gli ingressi è definita come

$$r_{x_1x_2}[n] = \alpha r_{ss}[n - D] + r_{n_1n_2}[n] \quad (9.278)$$

Ne segue che, nel dominio della frequenza, considerando la DTFT, la CPSD $R_{x_1x_2}(e^{j\omega})$ risulta definita come

$$R_{x_1x_2}(e^{j\omega}) = \alpha R_{ss}(e^{j\omega})e^{-j\omega D} + R_{n_1n_2}(e^{j\omega}). \quad (9.279)$$



9.7.3.2 Metodo della crosscorrelazione generalizzata di Knapp-Carter

La TDE può essere migliorata inserendo dei filtri, con FdT $W_1(e^{j\omega})$ e $W_2(e^{j\omega})$ opportunamente determinate, a valle dei sensori d'ingresso come illustrato in Figura 9.53. Per lo sviluppo, indicando con $R_{y_1 y_2}(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{r_{y_1 y_2}[n]\}$ la CPSD tra le uscite di tali filtri, risulta

$$\begin{aligned} r_{y_1 y_2}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_{y_1 y_2}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \text{DTFT}^{-1}\{R_{y_1 y_2}(e^{j\omega})\} \end{aligned} \quad (9.280)$$

dove (vedi Cfr. §1.2.6.6 per dettagli) la CPSD $R_{y_1 y_2}(e^{j\omega})$ può essere espressa come

$$R_{y_1 y_2}(e^{j\omega}) = W_1(e^{j\omega})W_2^*(e^{j\omega})R_{x_1 x_2}(e^{j\omega}). \quad (9.281)$$

Il metodo di Knapp-Carter [46], detto della **Generalized Cross Correlation (GCC)**, con riferimento alla Figura 9.53, è basato sul pre-filtraggio dei segnali ai sensori con FdT soggette al vincolo

$$F_g(e^{j\omega}) = W_1(e^{j\omega})W_2^*(e^{j\omega}) \quad (9.282)$$

con $F_g(e^{j\omega})$ definita come **finestra o funzione di pesatura** reale.

Con tale posizione, la ccf (9.280) risulta definita come

$$r_{y_1 y_2}^{(g)}[n] = \text{DTFT}^{-1}\{F_g(e^{j\omega})R_{x_1 x_2}(e^{j\omega})\}. \quad (9.283)$$

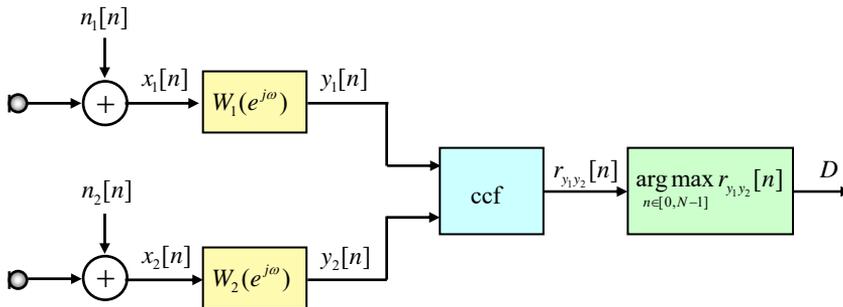


Figura 9.53 Metodo TDE della correlazione generalizzata o **Generalized Cross-Correlation method (GCC)** di Knapp-Carter.

Per $F_g(e^{j\omega})$ reale, infatti, $W_1(e^{j\omega})$ e $W_2(e^{j\omega})$ hanno *necessariamente* la stessa fase per cui non influiscono sulla localizzazione del picco della ccf.

Dalla modalità di scelta della funzione di pesatura $F(e^{j\omega})$ è possibile definire vari algoritmi. Per esempio, per $F(e^{j\omega}) = 1$, la (9.283) coincide con il metodo semplice della crosscorrelazione (9.277).

In generale la CPSD non è nota a priori ma è stimata con una media temporale indicata come $\hat{R}_{x_1x_2}(e^{j\omega})$. In questo caso, considerando una generica funzione peso $F(e^{j\omega})$ reale, la (9.283) è indicata come

$$\hat{r}_{y_1y_2}^{(g)}[n] = \text{DTFT}^{-1} \{ F(e^{j\omega}) \hat{R}_{x_1x_2}(e^{j\omega}) \}. \quad (9.284)$$

Osservazione

La (9.283) è interpretabile anche come una finestatura in frequenza della CPSD, prima di effettuare la DTFT^{-1} , al fine di ridurre l'errore di stima del ritardo (9.277). In letteratura [45]-[47], sono state proposte diverse metodologie per la determinazione della finestra ottimale. Di seguito ne sono indicate alcune basate su paradigmi diversi tra cui la stima di massima verosimiglianza o ML.

Metodo della pesatura di Roth

Nel metodo di Roth [45] la funzione di pesatura, indicata come $F_R(e^{j\omega})$, è definita come

$$F_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{R_{x_1x_1}(e^{j\omega})}. \quad (9.285)$$

Con tale posizione, la ccf (9.284) è equivalente alla risposta impulsiva del filtro ottimo di Wiener (Cfr. §3.3.1) definito come

$$\hat{r}_{x_1x_2}^{(R)}[n] = \text{DTFT}^{-1} \left\{ \frac{\hat{R}_{x_1x_2}(e^{j\omega})}{R_{x_1x_1}(e^{j\omega})} \right\}. \quad (9.286)$$

La precedente è interpretabile come *migliore* approssimazione del *mappaggio* tra gli ingressi $x_1[n]$, $x_2[n]$. Quando $n_1[n] \neq 0$, si ha

$$R_{x_1x_1}(e^{j\omega}) = R_{ss}(e^{j\omega}) + R_{n_1n_1}(e^{j\omega}) \quad (9.287)$$

per cui per la (9.279), considerando il rumore ai sensori incorrelato, risulta

$$r_{x_1x_2}^{(R)}[n] = \delta[n - D] * \text{DTFT}^{-1} \left\{ \frac{\alpha R_{ss}(e^{j\omega})}{R_{ss}(e^{j\omega}) + R_{n_1n_1}(e^{j\omega})} \right\}. \quad (9.288)$$

Osservazione

Come nell'articolo originale di Knapp-Carter [46], per lo sviluppo teorico, le funzioni di pesatura sono determinate in base alle PSD vere. In genere, però, queste non sono disponibili e sostituite in pratica con le loro stime. In tal senso, la pesatura di Roth ha l'effetto di sopprimere la regione di frequenza in cui $R_{n_1n_2}(e^{j\omega})$ è grande e laddove la stima della CPSD $\hat{R}_{x_1x_1}(e^{j\omega})$ può essere affetta da errore più grande.

Metodo della *Smoothed Coherence Transform*

Nel metodo detto *Smoothed Coherence Transform* (SCOT) [45]-[47] la funzione di pesatura, indicata come $F_S(e^{j\omega})$, è definita come

$$F_S(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{R_{x_1x_1}(e^{j\omega})R_{x_2x_2}(e^{j\omega})}} \quad (9.289)$$

Per cui la (9.284) assume la forma

$$\begin{aligned} \hat{r}_{y_1y_2}^{(S)}[n] &= \text{DTFT}^{-1} \{ F_S(e^{j\omega}) \hat{R}_{x_1x_2}(e^{j\omega}) \} \\ &= \text{DTFT}^{-1} \left\{ \frac{\hat{R}_{x_1x_2}(e^{j\omega})}{\sqrt{R_{x_1x_1}(e^{j\omega})R_{x_2x_2}(e^{j\omega})}} \right\} \\ &= \text{DTFT}^{-1} \{ \hat{\gamma}_{x_1x_2}(e^{j\omega}) \}. \end{aligned} \quad (9.290)$$

Si osservi infatti, che la *funzione coerenza* (stimata) (Cfr. §1.2.6.5) è definita come

$$\hat{\gamma}_{x_1x_2}(e^{j\omega}) = \frac{\hat{R}_{x_1x_2}(e^{j\omega})}{\sqrt{R_{x_1x_1}(e^{j\omega})R_{x_2x_2}(e^{j\omega})}}. \quad (9.291)$$

Posto $W_1(e^{j\omega}) = [R_{x_1x_1}(e^{j\omega})]^{-1/2}$ e $W_2(e^{j\omega}) = [R_{x_2x_2}(e^{j\omega})]^{-1/2}$, il metodo SCOT può essere interpretato come un filtraggio di pre-sbiancamento eseguito prima del calcolo della crosscorrelazione.

Si osservi che nella (9.291), la PSD relativa al k -esimo sensore si suppone nota e, sotto certe condizioni, tale ipotesi può essere ragionevole. Nel caso in cui tali condizioni non fossero rispettate, anche in questo caso, possiamo considerare le PSD e CPSD stimate $\hat{R}_{x_kx_k}(e^{j\omega}) \sim R_{x_kx_k}(e^{j\omega})$ per $k = 1, 2$.

TDE con stima ML

Nel caso di stima a **massima verosimiglianza** si dimostra che (vedi [47] per dettagli), detta $C_{x_1x_2}(e^{j\omega}) = |\gamma_{x_1x_2}(e^{j\omega})|^2$ la *Magnitude Squared Coherence* (MSC), la funzione di pesatura è definita come

$$F_{ML}(e^{j\omega}) = \frac{C_{x_1x_2}(e^{j\omega})}{|R_{x_1x_2}(e^{j\omega})| [1 - C_{x_1x_2}(e^{j\omega})]}. \quad (9.292)$$

Per cui sostituendo nella (9.280) risulta

$$r_{y_1y_2}^{(ML)}[n] = \text{DTFT}^{-1} \left\{ \frac{C_{x_1x_2}(e^{j\omega})}{[1 - C_{x_1x_2}(e^{j\omega})]} \cdot e^{j\hat{\phi}(e^{j\omega})} \right\} \quad (9.293)$$

dove

$$e^{j\hat{\phi}(e^{j\omega})} = \frac{\hat{R}_{x_1x_2}(e^{j\omega})}{|R_{x_1x_2}(e^{j\omega})|}. \quad (9.294)$$

e nel caso di rumore incorrelato additivo risulta

$$e^{j\hat{\phi}(e^{j\omega})} \sim e^{-j\omega\hat{D}} \quad (9.295)$$

per cui la fase $\hat{\phi}(e^{j\omega})$ rappresenta una misura del tempo e risulta $\hat{D} = \hat{\phi}(e^{j\omega})$.

Il metodo ML assegna alla fase un peso elevato nella regione di frequenza in cui la MSC è relativamente grande. Inoltre, la correlazione (9.293) presenta il suo valore massimo per $n = D$, ovvero quando $e^{j\hat{\phi}(e^{j\omega})} e^{j\omega D} = 1$.

Si osservi che, nel caso di PSD e CPSD stimate, il metodo è detto *Approximate Maximum Likelihood* (AML).

Metodo della trasformazione di fase (PHAT)

La funzione di pesature definita come

$$F_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{|R_{x_1x_2}(e^{j\omega})|} \quad (9.296)$$

è indicata come **PHAT Transform (PHAT)** per cui la (9.284) può essere espressa come

$$\hat{r}_{y_1y_2}^{(P)}[n] = \text{DTFT}^{-1} \left\{ \frac{\hat{R}_{x_1x_2}(e^{j\omega})}{|R_{x_1x_2}(e^{j\omega})|} \right\} \quad (9.297)$$

ovvero, per la (9.294) risulta che $\hat{r}_{y_1y_2}^{(P)}[n] = \text{DTFT}^{-1} \left\{ e^{j\hat{\phi}(e^{j\omega})} \right\}$. Risulta allora che per il modello di segnale (9.275) e rumore incorrelato (ovvero $R_{n_1n_2}(e^{j\omega}) = 0$) abbiamo

$$|R_{x_1x_2}(e^{j\omega})| = \alpha R_{ss}(e^{j\omega}) \quad (9.298)$$

e in questo caso, sempre per la (9.294), vale $\hat{r}_{y_1y_2}^{(P)}[n] = \delta[n - \hat{D}]$; in altri termini, **la correlazione fornisce una stima diretta del ritardo**.

Osservazione

La tecnica PATH per il modello di segnale (9.275) e rumore incorrelato, idealmente, non soffre di *spread* come altri metodi. In pratica, però, se $\hat{R}_{x_1x_2}(e^{j\omega}) \neq R_{x_1x_2}(e^{j\omega})$ allora $e^{j\hat{\phi}(e^{j\omega})} \neq e^{-j\omega\hat{D}}$ e la stima della correlazione $\hat{r}_{y_1y_2}^{(P)}[n]$ non è una funzione delta. Altri problemi possono sorgere quando l'energia del segnale d'ingresso è piccola. Nel caso in cui, per alcune frequenze, $R_{x_1x_2}(e^{j\omega}) = 0$ e la fase $\phi(e^{j\omega})$ è indefinita e, quindi, la stima del ritardo impossibile. Ciò suggerisce che per la funzione $F_p(e^{j\omega})$ occorre considerare una ulteriore pesatura per compensare i casi di assenza del segnale d'ingresso.

9.7.3.3 Metodo SRP-PHAT

Il **metodo *Steered Response Power PHAT*** (SRP-PHAT) consiste nella combinazione tra il metodo DOA SRP e la pesatura GCC PHAT [52].

Da una semplice ispezione visiva della Figura 9.53, osserviamo che questa corrisponde esattamente a un beamformer convenzionale di tipo *filter-and-sum* a due canali.

Con riferimento alla Figura 9.54, generalizzando la funzione di pesatura GCC PHAT al caso di P canali, dalla (9.282) risulta $F_{kp}(e^{j\omega}) = W_k(e^{j\omega})W_p^*(e^{j\omega})$. Per cui, per la potenza di uscita del FSBF, risulta

$$P(\theta) = \sum_{k=1}^P \sum_{p=1}^P \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{kp}(e^{j\omega}) X_k(e^{j\omega}) X_p^*(e^{j\omega}) e^{j\omega(n_{\tau_k} - n_{\tau_p})} d\omega \tag{9.299}$$

Si osservi che nel caso con più di due canali la pesatura PHAT assume la forma

$$F_{kp}(e^{j\omega}) = \frac{1}{|X_k(e^{j\omega})X_p^*(e^{j\omega})|} \tag{9.300}$$

che, in pratica, per il FSBF corrisponde a filtri di canale individuali definiti come

$$W_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{|X_p(e^{j\omega})|} \quad \text{per } p = 1, 2, \dots, P \tag{9.301}$$

indicati come *SRP-PHAT filters*. Si osservi che indicando con $r_{kp}[n_{\tau}]$ la GCC-PHAT tra le uscite $y_k[n]$ e $y_p[n]$, nel dominio del tempo discreto, la (9.299) può essere espressa come

$$P(\theta) = \sum_{k=1}^P \sum_{p=1}^P r_{kp}[n_{\tau_p} - n_{\tau_k}]. \tag{9.302}$$

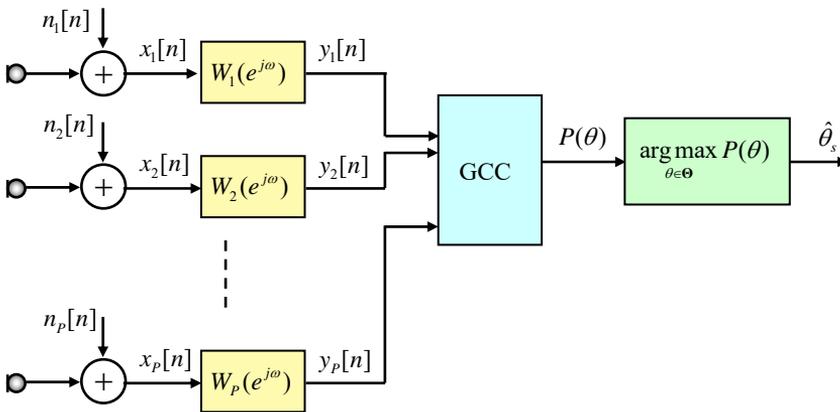


Figura 9.54 Metodo SRP-PATH o GCC a P canali.

La precedente è la somma delle GCC calcolate tra tutte le possibili permutazioni tra coppie di ingressi, traslate temporalmente dalla differenza tra gli steering delay.

9.8 Bibliografia

- [3] W. W. Seto, "Acoustics", McGraw-Hill, New York, Jan 1971.
- [4] H. Krim, M. Viberg, "Two Decades of Array Signal Processing Research – the Parametric Approach", IEEE Signal Processing Magazine, pp. 67-94, July 1996.
- [5] I.A. McCowan, "Microphone Arrays: A Tutorial", Technical report, Queensland University Technology, Australia, April 2001.
- [6] S. Fisher, K.D. Kammeyer and K. U. Simmer, "Adaptive Microphone Arrays for Speech Enhancement in Coherent and Incoherent Noise Fields", 3rd joint meeting of the Acoustical Society of America and the Acoustical Society of Japan, Honolulu Hawaii, 2-6, December, 1996.
- [7] G. W. Elko, "Spatial Coherence Functions for Differential Microphones in Isotropic Fields", in Microphone Arrays, M. Brandstein and D. Ward (eds.), ISBN: 3-540-41953-5, Springer, 2001.
- [8] J. Capon, R. J. Greenfield, and R. J. Kolker, "Multidimensional maximum-likelihood processing of a large aperture seismic array," Proc. IEEE, vol. 55, pp. 192-211, Feb. 1967.
- [9] J. Capon, "High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," Proceedings of the IEEE, vol. 57, pp. 1408–1418, August 1969.
- [10] J. Bitzer, K.D. Kammeyer and K. U. Simmer, "An Alternative Implementation of the Superdirective Beamformer", Proc. 1999 IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, New Paltz, New York, Oct. 17-20, 1999.
- [11] B. Widrow, P.E. Manteley, L.J. Griffiths, B.B. Goode, "Adaptive Antenna Systems", Proceedings of the IEEE, Vol. 55, No. 12, pp.2143–2159, Dec. 1967.
- [12] S. Doclo, M. Moonen, "Design of Broadband Beamformers Robust Against Gain and Phase Errors in the Microphone Array Characteristics", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 51, No. 10, pp. 2511–2526, October 2003.
- [13] H. Chen, W. Ser, "Design of Robust Broadband Beamformers With Passband Shaping Characteristics Using Tikhonov Regularization", IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, Vol. 17, No. 4, pp. 665–681, May 2009.
- [14] M. Brandstein, D. Wards, "Microphone Arrays", Springer-Verlag, 2001.
- [15] G. W. Elko, "Differential Microphones Array", in Audio Signal Processing for Next Generation Multimedia Communication Systems, Y. Huang, J. Benesty (eds.), Kluwer, ISBN 1-4020-7768-8, 2004.
- [16] Harry L. Van Trees, "Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory", Wiley Interscience, ISBN 0-471-22110-4, 2002.
- [17] B. Van Veen, K.M. Buckley, "Beamforming a versatile approach to spatial filtering", IEEE Signal Processing Magazine, pp. 4–24, April 1988.
- [18] L.J. Griffiths, "A simple adaptive algorithm for real-time processing in antenna arrays" Proceedings of the IEEE, Vol. 57, No. 10, 1696–1704, Oct. 1969.
- [19] O.L. Frost III, "An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing", Proceedings of the IEEE, Vol. 60, No. 8, pp. 926–935, Aug. 1972.
- [20] R. Zelinski, "A Microphone Array with Adaptive Post-Filtering for Noise Reduction in Reverberant Rooms", Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-88, Vol. 5, pp: 2578–2581, 1988.

- [21] C. Marro, Y. Mahieux, K. Simmer, "Performance of adaptive dereverberation techniques using directivity controlled arrays", In Proc. European Signal Processing Conf., EUSIPCO96, pp. 1127-1130, Trieste, Italy, 1996.
- [22] S.P. Applebaum, Adaptive arrays, Syracuse University Research Corp., Report SURC SPL TR 66-001, Aug. 1966 (reprinted in IEEE Trans. on AP, AP-24, 585-598, Sept. 1976).
- [23] H. Cox, R.M. Zeskind, and T. Kooij, "Practical Supergain", IEEE Trans. On ASSP, ASSP-34, No. 3, pp. 393-398, June 1986.
- [24] H. Cox, R.M. Zeskind, and M.M. Owen, "Robust adaptive beamforming", IEEE Trans. On ASSP, ASSP-35, pp. 1365-1375, Oct. 1987.
- [25] L.J. Griffiths, W.J. Charles, "An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. AP30, No. 1, pp. 27-34, Jan. 1982.
- [26] M. Joho, G.S. Moschytz, "Adaptive Beamforming with Partitioned Frequency-Domain Filters," IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, New Palz, NY, USA, 19-22 Oct. 1997.
- [27] J.J. Shynk, "Frequency-domain and multirate adaptive filtering", IEEE SP Magazine, pp. 14-37, Jan. 1992.
- [28] M.H. Er, A. Cantoni, "Derivative Constraints for Broad-Band Element Spase Antenna Array Processors", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. AP31, pp. 1378-1393, Dec. 1983.
- [29] K.M. Buckley, L.J. Griffiths, "An Adaptive Generalized Sidelobe Canceller with Derivative constrains", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. AP34, No. 3, pp. 311-319, March 1986.
- [30] F.J. Harris, "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform," Proceedings of the IEEE, Vol.66, No.1, pp. 51-84, January 1978.
- [31] K.M. Buckley, "Broad-Band Beamforming and the Generalized Sidelobe Canceller", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-34, No. 5, pp. 1322-1323, Oct. 1986.
- [32] S. Haykin, "Adaptive Filter Theory", Third Edition, Prentice Hall ed., 1996.
- [33] S. Fischer, K.U. Simmer, "Beamforming microphone arrays for speech acquisition in noisy environments", Speech Communication: special issue on acoustic echo control and speech enhancement techniques, Vol. 20, No 3-4, pp. 215-227, Dec. 1996.
- [34] S. Fisher, K. D. Kammeyer, "Broadband Beamforming with Adaptive Postfiltering for Speech Acquisition in Noisy Environments", Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing., ICASSP-97, Vol. 1, pp: 359-362, April 1997.
- [35] M. Omologo, P. Svaizer, and M. Matassoni, "Environmental conditions and acoustic transduction in hands-free speech recognition," Speech Commun., vol. 25, no. 1-3, pp. 75-95, Aug. 1998.
- [36] D. Johnson and D. Dudgeon, "Array Signal Processing: Concepts and Techniques", Prentice- Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [37] O. Hoshuyama, A. Sugiyama and A. Hirano, "A Robust Adaptive Beamformer for Microphone Arrays with a Blocking Matrix Using Constrained Adaptive Filters", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. SP-47, No. 10, pp. 2677-2684, October 1999.
- [38] S. Doclo and M. Moonen, "Superdirective Beamforming Robust Against Microphone Mismatch", IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, Vol. 15, No. 2, pp. 617-631, February 2007.
- [39] S. Gannot, D. Burshtein, E. Weinstein, "Signal Enhancement Using Beamforming and Nonstationarity with Applications to Speech", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. SP-49, No. 8, pp. 1614-1626, August 2001.
- [40] I. Cohen, S. Gannot and B. Berdugo, "An Integrated Real-Time Beamforming and Postfiltering System for Nonstationary Noise Environments", EURASIP Journal on Applied Signal Processing, Vol. 11, pp. 1064-1073, 2003.

- [41] S. Gannot and I. Cohen, “Speech Enhancement Based on the General Transfer Function GSC and Postfiltering”, *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, Vol. 12, No. 6, pp. 561–571, November 2004.
- [42] Y. Avargel and I. Cohen, “System identification in the short time Fourier transform domain with crossband filtering”, *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 15, no. 4, pp. 1305–1319, May 2007.
- [43] R. Talmon, I. Cohen and S. Gannot, “Relative Transfer Function Identification Using Convolutional Transfer Function Approximation”, *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing*, Vol. 17, No. 4, pp. 546–555, May 2009.
- [44] H. Chen, and W. Ser, “Design of Robust Broadband Beamformers With Passband Shaping Characteristics Using Tikhonov Regularization”, *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, Vol. 17, No. 4, pp. 665–681, May 2009.
- [45] Special Issue, “Time Delay Estimation”, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-29, No. 3, June 1981.
- [46] C. H. Knapp and G. C. Carter, “The generalized correlation method for estimation of time delay”, *IEEE Trans. Acoustic, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-24, No. 4, pp. 320 – 327, August 1976.
- [47] K. Scarbrough, N. Ahmed, and G. C. Carter, “On the simulation of a class of time delay estimation algorithms”, *IEEE Trans. Acoustic, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-29, No. 3, pp. 534-540, June 1981.
- [48] R.O. Schmidt, “A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation”, Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford, CA, Nov. 1981.
- [49] R.O. Schmidt, “Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 34, No. 3, pp. 276–280, March 1986.
- [50] A. Paulraj, R. Roy, and T. Kailath, “Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques-ESPRIT”, *Proc. 19th Asilomar Conf. on Signals, Systems, and Computers*, Asilomar, CA, Nov. 1985.
- [51] R. Roy and T. Kailath, “ESPRIT – estimation of signal parameters via rotational invariance techniques”, *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984–995, July 1989.
- [52] J. H. Di Biase, H. F. Silverman, and M. S. Brandstein, “Robust Localization in Reverberant Rooms”, in *Microphone arrays: signal processing techniques and Applications*, Eds: M. Brandstein and D. Ward, ISBN 3-540-42953-5, Springer-Verlag, 2001.
- [53] S. Haykin and K. J. Ray Liu, “Handbook on Array Processing and Sensor Networks” ISBN 978-0-470-37176-3, Wiley & Sons, Inc., 2009.