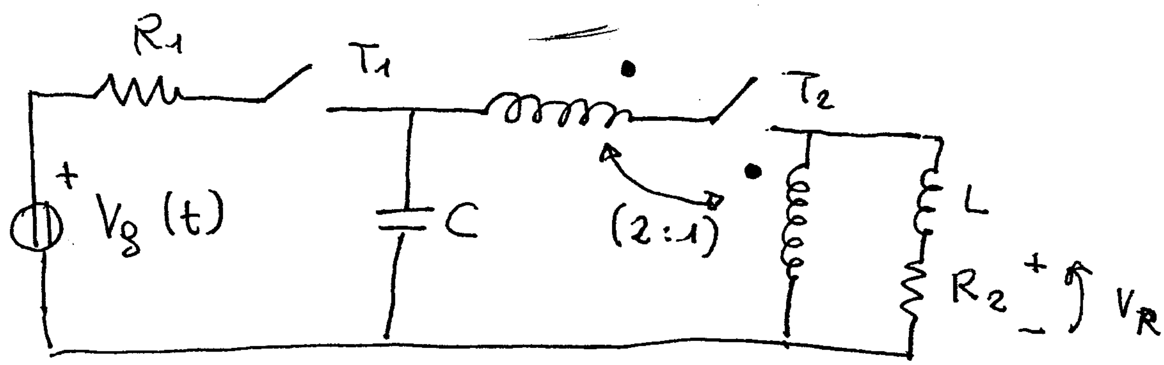
APPELLO DI TEORIA DEI CIRCUITI I

((INF. + TEL.) DEL 19/06/2002

1^ PROVA



$V_g(t) = 2\,[V]$ $R_1 = R_2 = 1\,[\Omega]$ $L = 1\,[H]$

$C = 1\,[F]$

All'inizio, gli interruttori sono entrambi aperti ed il circuito è a riposo.

1) Al tempo $t=0$, l'interruttore T_1 si chiude.

2) Al tempo $t=2$, l'interruttore T_1 si riapre e T_2 si chiude.

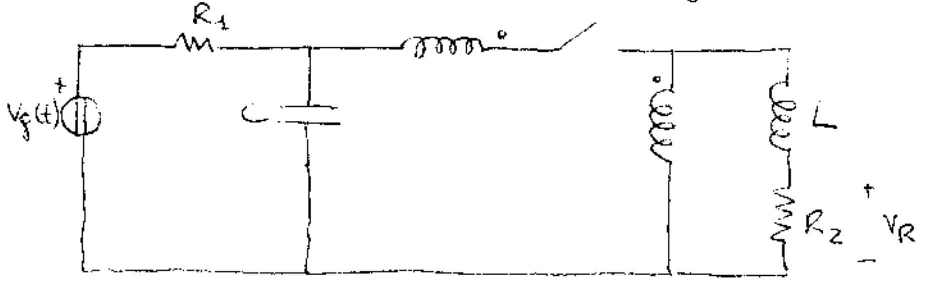
Calcolare $V_R(t)$, per $t>0$, con il verso indicato in figura.

ING. INFORMATICA
MAT. 0909

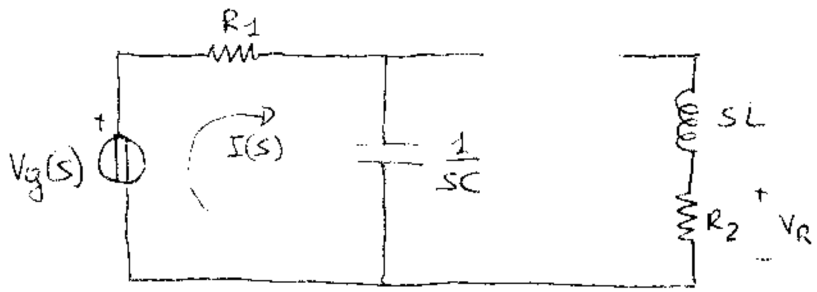
Per $t < 0$ gli interruttori sono entrambi aperti ed il circuito è a riposo, questo vuol dire che

$$v_C(0^-) = 0 \qquad i_L(0^-) = 0$$

Al tempo $t = 0$ l'interruttore T_1 si chiude il circuito risultante è il seguente:



Il trasformatore non gioca alcun ruolo poichè la corrente in entrambi i suoi rami è zero, procedo nello studio del circuito trasformandolo secondo Laplace.



$$V_g(s) = \frac{2}{s}$$

È evidente che nel resistore R_2 non scorre corrente, per cui

$v_R(t) = 0$ per $t \in (0, 2)$.

Non ci resta che calcolare la tensione sul condensatore, in quanto non scorre corrente neanche nell'induttore.

$$I(s) = \frac{V_g(s)}{R_1 + \frac{1}{sC}} = \frac{2}{s\left(1 + \frac{1}{s}\right)} = \frac{2\cancel{s}}{\cancel{s}(1+s)} = \frac{2}{1+s}$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s) = \frac{2}{s(1+s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

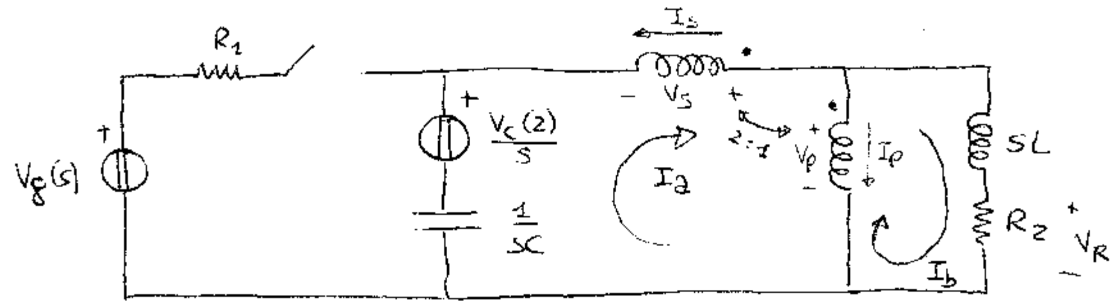
$$A = \left.\frac{2}{1+s}\right|_{s=0} = 2 \qquad B = \left.\frac{2}{s}\right|_{s=-1} = -2$$

$$V_C(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$V_C(t) = 2u_{-1}(t) - 2e^{-t}u_{-1}(t) = 2(1-e^{-t})u_{-1}(t)$$

$$V_C(2) = 2(1-e^{-2}) = 2(0{,}86) = 1{,}73\,V$$

Al tempo $t=2$, l'interruttore T_1 si riapre e T_2 si chiude, il circuito si trasforma nel modo seguente:



Applico il metodo delle maglie:

$$\begin{cases} \frac{1}{sC} I_a = \frac{V_C(2^-)}{s} + V_S - V_p \\ (sL+R_2) I_b = V_p \end{cases}$$

Le relazioni costitutive del trasformatore sono:

$V_S = 2V_p$

$I_S = -\frac{1}{2} I_p$

dalle quali posso trarre il vincolo da aggiungere al sistema:

$$\begin{matrix} I_s = -I_a \\ I_p = I_a - I_b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -I_a = -\frac{1}{2}(I_a - I_b) \\ I_a = \frac{1}{2}(I_a - I_b) \end{matrix} \Rightarrow I_a = -I_b$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{s} I_b = \frac{1{,}73}{s} + V_p \\ (s+1) I_b = V_p \end{cases}$$

$$-\frac{1}{s} I_b = \frac{1{,}73}{s} + (1+s) I_b$$

$$\frac{1}{s} I_b + (1+s) I_b = -\frac{1{,}73}{s}$$

$$\left(\frac{s^2+s+1}{s}\right) I_b = -\frac{1{,}73}{s}$$

$$I_b = -\frac{\cancel{s}}{s^2+s+1} \cdot \frac{1{,}73}{\cancel{s}} = -\frac{1{,}73}{s^2+s+1}$$

$$V_R(s) = R_2 I_b = I_b = -\frac{1{,}73}{s^2+s+1}$$

$$s^2+s+1=0 \qquad s = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}j}{2}$$

$$V_R(s) = \frac{A}{s-\left(\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}\right)} + \frac{A^*}{s-\left(\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}\right)}$$

$$A = -\left.\frac{1{,}73}{s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j}\right|_{s=\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}} = -\frac{\cancel{1{,}73}}{\cancel{\sqrt{3}}j} = j$$

$$A^* = -j$$

$$V_R(s) = \frac{j}{s-\left(\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}\right)} - \frac{j}{s-\left(\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}\right)}$$

$$V_R(t) = j e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)t} - j e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)t} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\left[j e^{\frac{\sqrt{3}}{2}jt} - j e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}jt}\right] =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\left[-\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}jt}}{j} + \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}jt}}{j}\right] =$$

$$= -2e^{-\frac{1}{2}t}\left[\frac{e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} - e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{2j}\right] =$$

$$= -2e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

In conclusione

$$V_R(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \in (0,2) \\ -2e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & t > 2 \end{cases}$$